

# Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

ZAMP

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

Editores: J. Ackeret E. Baumann P. Scherrer E. Stiefel F. Stüssi W. Traupel H. Ziegler

Redactor: R. Sängler

## INHALT - CONTENTS - SOMMAIRE

SEARS, W. R.: Rotating Stall in Axial Compressors . . . . .	429
GAUTSCHI, W.: Über den Fehler des Runge-Kutta-Verfahrens für die numerische Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen $n$ -ter Ordnung . . . . .	456
SPONDER, E.: Eine genäherte Behandlung des schweren symmetrischen Kreisels in nicht-Eulerschen Koordinaten . . . . .	462

*Kurze Mitteilungen - Brief Reports - Communications brèves*

ANTENEN, K.: Über den Mechanismus einiger Elektrete . . . . .	478
PRUPPACHER, H. R., und SÄNGER, R.: Mechanismus der Vereisung unterkühlter Wassertropfen durch disperse Keimsubstanzen II . . . . .	485
ROTH-DESMEULES, E.: Zur Berechnung der Geschossabweichung unter dem Einfluss eines Seitenwindes . . . . .	494
RUTISHAUSER, H.: Bemerkungen zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen $n$ -ter Ordnung . . . . .	497
SAITO, H.: Torsion of a Circular Shaft Press-fitted with a Disc . . . . .	498

*Varia - Miscellaneous - Divers*

Herbsttagung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft vom 24. bis 25. September 1955 in Pruntrut . . . . .	503
Buchbesprechungen - Book Reviews - Notices bibliographiques . . . . .	506

ZAMP

Vol. VI

Fasc. 6

Pag. 429-508

25. 11. 55

Birkhäuser Verlag Basel, Schweiz

# Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

ZAMP

Redactor: Prof. Dr. R. Sängler, Postfach Zürich 23 (Schweiz)

ZAMP erscheint regelmässig alle zwei Monate. *Redaktionsschluss*: spätestens 8 Wochen vor Erscheinungstermin. Manuskripte und alle die Redaktion betreffenden Zuschriften sind an den Redaktor zu richten. Manuskripte für *Kurze Mitteilungen* können, falls die Autoren auf Zustellung eines Korrekturabzuges verzichten, 6 Wochen vor Erscheinungstermin eingereicht werden. Die Beiträge werden in deutscher, englischer, französischer oder italienischer Sprache publiziert, doch soll jeder *Originalarbeit* und *Kurzen Mitteilung* eine kurze Zusammenfassung in einer andern als der Originalsprache beigegeben werden. *Abbildungsvorlagen* sollen reproduktionsfertig mit Reduktionsmaßstab versehen eingeleistet werden, hingegen soll die Beschriftung nur mit Bleistift, am besten auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier, ausgeführt werden. Autoren von Originalarbeiten mit mehr als 16 Seiten Umfang haben von der 17. Seite an einen *Beitrag an die Satzkosten* von Fr. 20.- pro Seite und von der 25. Seite an einen solchen von Fr. 35.- pro Seite zu entrichten. Die Verfasser von *Zusammenfassenden Berichten*, *Originalarbeiten* und *Kurzen Mitteilungen* erhalten 50 Gratisseparata ohne Umschlag.

ZAMP is published regularly every two months. All papers must be in the hands of the editor at least 8 weeks before publication of the issue. Manuscripts and all other correspondence concerning contributions to the periodical should be addressed to the *Editor*. Manuscripts of *Brief Reports* can be submitted 6 weeks before publication of the issue, if the authors dispense with proof-reading. The contributions will be published in English, German, French, or Italian; to each *Original Paper* and *Brief Report* should be added a brief summary in a language other than the original one. Drawings and photographs for *illustrations* should be sent ready for reproduction with indication of the proposed reduction; lettering on the illustrations should be entered in pencil, preferably on a loosely attached transparent sheet. Authors of *Original Papers* exceeding 16 pages are requested to pay a *contribution* of Fr. 20.- per page for pages 17-24, and of Fr. 35.- per page for pages 25 and over. The authors of *Survey Articles*, *Original Papers*, and *Brief Reports* receive 50 free separata prints without cover.

ZAMP paraît régulièrement tous les deux mois. Derniers délais pour présenter les manuscrits: deux mois avant la parution de chaque numéro. Tous les manuscrits et toute correspondance relatifs à la rédaction sont à adresser au rédacteur. Les manuscrits pour des *communications brèves* peuvent être présentés six semaines avant la parution, si les auteurs renoncent à contrôler les épreuves. Les articles seront publiés en langues française, anglaise, allemande ou italienne; cependant, chaque *article original* et toute *communication brève* devront être accompagnés d'un résumé en une autre langue. Les *illustrations* doivent être prêtes à la reproduction et il faudra y indiquer l'échelle de réduction. La légende devra être inscrite au crayon, de préférence sur papier transparent, légèrement collé à l'illustration. Pour articles originaux qui dépassent 16 pages, une *contribution* de Fr. 20.- par page doit être payée pour les pages 17-24; à partir de page 25 la contribution est de Fr. 35.- par page. Les auteurs de *comptes rendus*, ainsi que ceux d'*articles originaux* et de *communications brèves* recevront 50 tirés à part sans couverture de leur article.

Jahresabonnement (6 Nummern): Inland Fr. 38.-, Ausland sFr. 48.-, Einzelnummer Fr. 10.-

Annual subscription (6 issues): Switzerland Fr. 38.-, foreign Fr. 48.-, single copy Fr. 10.-

Abonnement annuel (6 numéros): Suisse Fr. 38.-, étranger Fr. 48.-, le numéro Fr. 10.-

Postabonnement — Post-Office Subscription — Abonnement par office postal

Belgien, Luxemburg  
Italien

Dänemark  
Marokko

Deutschland  
Norwegen

Finnland  
Portugal

Holland  
Schweden

Inserate/Advertisements/Annonces:  $\frac{1}{2}$  Seite/page: Fr. 165.-,  $\frac{1}{4}$  Seite/page: Fr. 88.-,  $\frac{1}{8}$  Seite/page: Fr. 50.-

Alle Rechte, einschliesslich der Übersetzung und Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm, vorbehalten. — All rights, incl. translations and photostatic and microfilm reproduction, reserved. — Tous droits, y compris traductions et reproductions photostatiques et par microfilm, réservés.

Copyright 1955 by Birkhäuser Verlag, Basel 10, Switzerland

Printed in Switzerland



## Rotating Stall in Axial Compressors<sup>1)</sup>

By WILLIAM R. SEARS, Ithaca, New York<sup>2)</sup>

### Introduction

Experiments carried out in axial-flow compressors by several investigators [1], [2], [3]<sup>3)</sup> have disclosed that violently asymmetrical flow patterns occur in such machines when their flow rate is so restricted as to cause blade stalling. Typically, certain portions of the annulus of blades appear to be stalled while others remain unstalled; the stalled portions exhibit reduced airflow and the roughness of flow characteristic of stalling. But what seems most important is the fact that these patterns of stalled and unstalled flow do not remain fixed to either the stator or the rotor blades, but rotate steadily in the direction of rotor rotation at a lower speed than that of the rotor blades. The result is that both rotor and stator blades are subjected to violent periodic aerodynamic loads, since they find themselves alternatively in stalled and unstalled flow.

The experiments mentioned above [1], [2], [3] were carried out with the aid of hot-wire anemometers. One wire attached to a stator row is sufficient to disclose that a periodic flow occurs; several wires, spaced circumferentially in a stator row provide, in addition, information concerning the rate of rotation of the asymmetrical flow pattern. Patterns having one stalled region have been observed, and also patterns having several, equally spaced regions. The regions of stalled flow may extend across the annulus from blade root to tip (Figure 1), or they may lie near the blade roots (Figure 2) or near the blade tips.

There are, in fact, interesting differences between the results obtained by the various experimenters. What is common to them is principally the fact already stated above: that stalling of axial-flow compressors is accompanied by the appearance of steadily-rotating periodic stall patterns. This conclusion has been so generally reached that it may even be surmised that all axial-flow compressors and pumps behave in this way. If this is correct, it may provide an explanation of numerous fatigue failures of blades, which have previously been blamed on flutter or stall flutter, or on other causes.

It should also be made clear that this phenomenon is not the familiar one known as 'surge', which involves periodic variation of the rate of flow through

<sup>1)</sup> This research was partially supported by the United States Air-Force under Contract No. AF 33 (038)-21406, monitored by the Office of Scientific Research, Air Research and Development Command.

<sup>2)</sup> Graduate School of Aeronautical Engineering, Cornell University.

<sup>3)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 454.

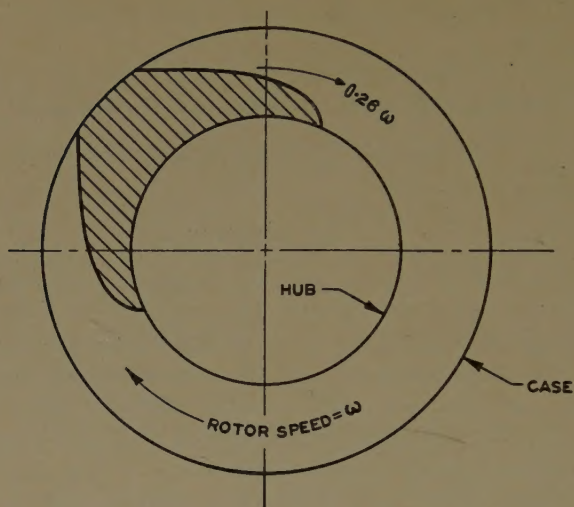


Figure 1

Depiction of rotating-stall pattern [2]. Three-stage compressor.

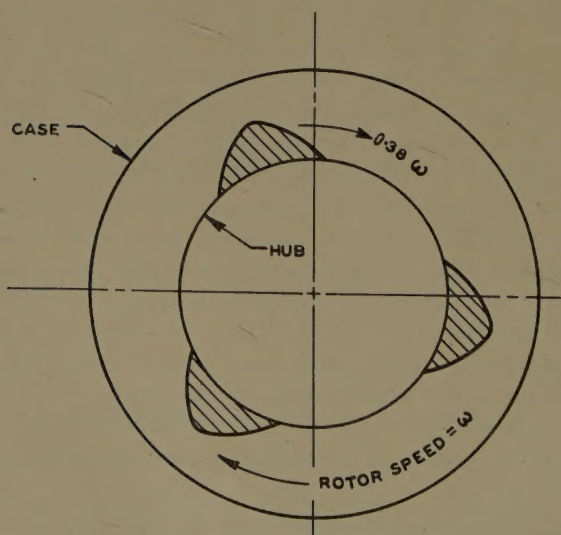


Figure 2

Depiction of rotating-stall pattern [2]. Three-stage compressor. Slightly higher flow than for Figure 1.



the machine. This distinction has already been pointed out clearly [1], [2], but still seems to require emphasis. The phenomenon of rotating stall is basically one involving steady flow through the machine; only its distribution around the annulus is nonuniform. The flow, in fact, becomes a truly steady flow when viewed from a coordinate system rotating with the stall pattern—a fact that will be exploited farther below. To be sure, the two phenomena, rotating stall and surge, may occur together, and it appears that the non-uniqueness of the rotating-stall type of flow for any certain flow rate may be one of the chief sources of the instability that we call surge [2].

The present paper is a review of several attempts to explain the phenomenon of rotating stall on a theoretical basis. As will be seen, the attempts have not been entirely successful to date, especially because they concern a type of flow—unsteady, stalled flow—about which there is insufficient knowledge. On the other hand, they are not completely unsuccessful, since they show, at least qualitatively, that flow patterns of the rotating-stall type may occur in axisymmetrical rigid blade rows with steady, uniform inflow to the machine. This conclusion is of some importance. It seems clear that stall flutter, for example, could produce periodic flow patterns that would rotate around the blade annulus if the flutter frequency were not the same as, or a multiple of, the rotational frequency. But the occurrence of stall flutter must depend intimately on the elastic properties of the blades. Thus it is important to know whether a similar phenomenon can occur purely aerodynamically, in a row of rigid blades.

### Notations

$A$	constant in equation (35);
$b$	$V/U$ (Figure 3);
$B$	constant in equation (35);
$c_l$	lift coefficient of blade; $c_l[\alpha]$ denotes the lift coefficient as function of $\alpha$ , while $c_l(y)$ represents the same quantity as function of $y$ ; i.e., $c_l[\alpha(y)] \equiv c_l(y)$ ;
$C$	constant in equation (35);
$C_1, C_2$	constants in equations (8) to (12);
$h$	$h(y) = \Delta H / \rho U^2$ ;
$h_n$	Fourier coefficient of $h(y)$ ;
$H$	$H(x, y)$ = total pressure;
$\Delta H$	$\Delta H(y)$ = increase of $H$ across blade row at $y$ ;
$k$	circumferential speed of blades relative to flow pattern, divided by axial flow speed $U$ ; positive in negative $y$ direction;
$K_1, K_2$	constants in equations (38) and (42);
$l$	circumference of blade wheel;

$m$	(local) slope of the curve $c_l[\alpha]$ (per radian);
$M$	(local) slope of $h$ against $\beta_i$ in channel relations;
$n$	coordinate normal to undisturbed stream direction [Figure 3 and equation (3)];
$n$	summation index of Fourier series;
$p$	$p(x, y)$ = static pressure;
$\Delta p$	$\Delta p(y)$ = static pressure rise across blade row;
$\mathcal{R}$	real part;
$t$	time;
$u$	$u(x, y)$ = perturbation axial velocity component;
$u_n$	Fourier coefficient of $u_0(y)$ ;
$u_0(y)$	$u(0, y)$ ;
$U$	undisturbed axial velocity component;
$v$	$v(x, y)$ = perturbation circumferential velocity component;
$v_-(y)$	$v(-0, y)$ ;
$v_+(y)$	$v(+0, y)$ ;
$V$	$bU$ undisturbed circumferential velocity component;
$x$	axial coordinate (Figure 3);
$y$	circumferential coordinate (Figure 3);
$\alpha$	$\alpha(y) = (\beta_i + \beta_o)/2$ ; mean angle of attack;
$\alpha_n$	Fourier coefficient of $\alpha(y)$ ;
$\beta_i$	$\beta_i(y)$ inlet angle relative to blade (Figure 4);
$\bar{\beta}_i$	mean (unperturbed) value of $\beta_i$ ;
$\beta_o$	$\beta_o(y)$ outlet angle relative to blade (Figure 4);
$\beta_n$	Fourier coefficient of $\beta_i(y)$ ;
$\delta$	angle of phase lag of $h$ behind $\beta_i$ ;
$\Delta$	angle of phase lag of $c_l$ behind $\alpha$ ;
$\eta$	variable of integration;
$\kappa$	flow coefficient [equation (36)];
$\rho$	density of fluid;
$\sigma$	solidity of blade row (= chord/gap);
$\psi$	$\psi(x, y)$ = stream function;
$\Omega$	$\Omega(x, y)$ = vorticity.

*Subscripts, superscripts, etc.*

$( )_{-\infty}$	value at $x = -\infty$ ;
$( )_{\infty}$	value at $x = +\infty$ ;
$( )_c$	value given by the uniform-turning solution;
$( )^{(2)}$	rotational part of $(\sim)$ ;
$( )^{(1)}$	irrotational part of $(\sim)$ ;
$(\sim)$	variable part of $( )$ , defined by $( ) = ( )_c + (\sim)$ .

### Flow Through a Blade Row

All of the theoretical investigations of rotating stall, to date, are based on four simplifying assumptions; viz.,

- (1) The compressor is replaced by a single blade row.
- (2) Assuming that the blade length, i.e., the width of the blade annulus, is small compared to the mean radius, the blade row is replaced by a two-dimensional cascade of blades.
- (3) The flow is supposed to consist of a small perturbation of a uniform stream
- (4) Viscosity and compressibility of the fluid are neglected.

In all but one study [5], the further approximation has been made that:

- (5) The blade row consists of infinitely many blades; i.e., the row is replaced by a discontinuity surface at which energy, due to rotation of the blades, is introduced to the flow.

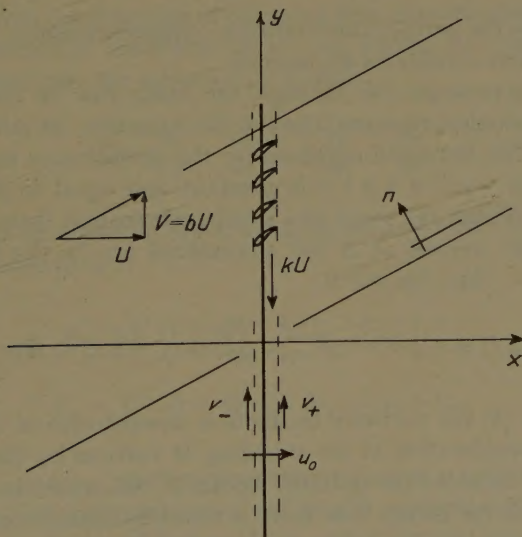


Figure 3

Diagram showing coordinate system and notation.

In the lone exception, which is an unpublished investigation [5], a row of discrete blades was first treated. To render the results practically useful, however, the same approximation of vanishing chords and blade spacing was later introduced, so that the work finally fell into the same category.

The two-dimensional incompressible-flow problem resulting from these assumptions is sketched in Figure 3. The discontinuity surface lies along the



$y$ -axis. It will now be assumed that the flow pattern is a steadily rotating one, as has been described above, and the coordinate system will be defined to be fixed relative to this moving pattern. The flow is thereby rendered steady, with a consequent simplification of the analysis. For example, BERNOULLI'S equation can now be used to describe the flow either upstream or downstream of the discontinuity sheet. It should be recognized that the analysis applies equally well to a stator or a rotor row, since there is no distinction between these from the point of view of the coordinate system employed.

Other notation to be employed in the analysis is indicated in Figure 3 and in Notations, page 431. So far, the problem is formulated exactly as in Reference [4] except that the swirl angle relative to the moving coordinate system,  $\tan^{-1} b$ , is not assumed to be small. The appropriate, linearized Bernoulli equation is, for  $x < 0$ ,

$$p + \rho U u + \rho V v = p_{-\infty}, \quad (1)$$

where  $u$  and  $v$  are the perturbation velocity components and  $p_{-\infty}$  is the pressure far upstream where conditions are uniform.

Let the total-pressure rise through the blade row be  $\Delta H(y)$ . Simply to provide a dimensionless representation of this quantity, let  $\Delta H(y)/(\rho U^2)$  be denoted by  $h(y)$ . The Bernoulli equation for the downstream region is then the statement that  $p + \rho U u + \rho V v$  is constant and equal to  $p_{-\infty} + \Delta H$  along any streamline. Within the scope of a small-perturbation theory, however, this statement can be revised as if the streamlines lay in the direction of the undisturbed flow. Thus, for  $x > 0$ ,

$$p + \rho U u + \rho V v = p_{-\infty} + \rho U^2 h(y - b x) = H(x, y). \quad (2)$$

In Reference [4] the vorticity in the flow downstream of the actuator was calculated by consideration of the shedding of vortices by the blades as they pass through a variable flow pattern. Actually, this resort to airfoil theory is unnecessary, since for steady flow there is a simple relation between the vorticity  $\Omega$  and the gradient of the total pressure  $H$ . This relation is, for the present application [10],

$$\frac{\partial H}{\partial n} = -\rho \sqrt{U^2 + V^2} \Omega(x, y), \quad (3)$$

where  $\partial H / \partial n$  denotes the derivative of  $H$  in the direction normal to the undisturbed streamlines; viz.,

$$\frac{\partial H}{\partial n} = \frac{\partial H}{\partial y} \cdot \frac{U}{\sqrt{U^2 + V^2}} - \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{V}{\sqrt{U^2 + V^2}} = \rho U h'(y - b x) \sqrt{U^2 + V^2}.$$



Therefore the vorticity is

$$\Omega(x, y) = -U h' (y - b x). \quad (4)$$

The boundary conditions far upstream are the vanishing of all perturbation quantities. The boundary condition far downstream is the condition of uniform pressure and parallel flow. The condition of parallel flow is

$$\frac{V+v}{U+u} \approx \frac{V}{U} \left(1 + \frac{v}{V} - \frac{u}{U}\right) = \text{constant} \quad (5)$$

or

$$\frac{v}{V} - \frac{u}{U} = \text{constant}. \quad (6)$$

It should be noticed that the direction of this parallel flow is not specified; it differs, in fact, from the direction of incoming flow. Nevertheless, this condition is sufficient to establish conditions at  $x = \infty$ , except for constant terms not required in the analysis, for equation (6) leads to

$$\Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = b \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (7)$$

at  $x = \infty$ .

With  $\Omega$  given by equation (4), it is easily verified that the solution of this differential equation for  $u$  is

$$u_{\infty} = U (1 + b^2)^{-1} h (y - b x) + C_1, \quad (8)$$

and therefore

$$v_{\infty} = U b (1 + b^2)^{-1} h (y - b x) + C_2, \quad (9)$$

These values,  $u_{\infty}$  and  $v_{\infty}$ , are the asymptotic values of  $u$  and  $v$  far downstream, while  $C_1$  and  $C_2$  are constants involved in the uniform-turning part of the solution, which is discussed below. It is easily verified, by substitution in equation (2), that these yield a constant value for  $\dot{p}_{\infty}$ .

### *The Uniform-Turning Solution*

Having established the flow conditions far upstream and far downstream, it is now possible to identify a solution consisting entirely of constants, which represents uniform turning of the flow through the blade row. Let these values be denoted by the subscript  $c$ . They are

For  $x < 0$ :

$$u_c = 0 = v_c, \quad \dot{p}_c = \dot{p}_{-\infty}.$$

For  $x > 0$ :

$$u_c = 0 = \frac{1}{1+b^2} U h_c + C_1, \quad v_c = \frac{b}{1+b^2} U h_c + C_2, \quad (10)$$

$$\dot{p}_c = \dot{p}_{-\infty} - \varrho V C_2 + \varrho \frac{1}{1+b^2} U^2 h_c = \dot{p}_{\infty}$$

or

$$\varrho U^2 h_c = \dot{p}_{\infty} - \dot{p}_{-\infty} + \varrho V \dot{v}_c$$

and

$$\Omega_c = 0.$$

### *The Boundary-Value Problem*

The uniform-turning solution is a trivial one so far as the phenomenon of rotating stall is concerned. To proceed to more interesting solutions it is necessary to work out the relations that exist between the flow variables both upstream and downstream of the blade row. These are, of course, different in the two regions because the flow upstream is irrotational while that downstream is rotational. The two regions are related at the blade row ( $x = 0$ ) by the continuity of the axial flow component and by the characteristics of the blades themselves, which will be discussed later. Let the velocity components just upstream of the blade row be called  $u_0(y)$  and  $v_-(y)$ . Then the value of  $u$  just downstream of the row must also be  $u_0(y)$ , while the tangential component will, in general, jump to a different value  $v_+(y)$ .

In terms of the familiar plane stream function  $\psi(x, y)$  whose derivatives are  $\psi_y = u$  and  $\psi_x = -v$ , the boundary-value problems of the upstream and downstream regions are, for  $x < 0$ :

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \psi &= 0, \quad u(-\infty, y) = 0 = v(-\infty, y), \\ \dot{p}(-\infty, y) &= \dot{p}_{-\infty} = \text{constant}, \quad u(-0, y) = u_0(y), \quad v(-0, y) = v_-(y). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

For  $x > 0$ :

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \psi &= -\Omega = U h' (y - b x), \\ u(\infty, y) &= \frac{1}{1+b^2} U h(y - b x) + C_1, \\ v(\infty, y) &= \frac{b}{1+b^2} U h(y - b x) + C_2, \\ \dot{p}(\infty, y) &= \dot{p}_{-\infty} - \varrho U C_1 - \varrho V C_2, \\ u(+0, y) &= u_0(y), \quad v(+0, y) = v_+(y). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$



For convenience, let all these quantities be considered as made up of the constant-turning parts, equations (10), and variable parts denoted by the sign ( $\tilde{\phantom{x}}$ ); i.e.,  $\psi = \psi_c + \tilde{\psi}$ , etc. Then, since the former consist of undisturbed flow upstream, equations (11) are the equations for  $\tilde{\psi}$ ,  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$ , and  $\tilde{p}$ , except for the boundary condition  $\tilde{p}(-\infty, y) = 0$ . Equations (12), on the other hand, are replaced, for  $x > 0$ , by:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \tilde{\psi} &= -\tilde{\Omega} = -\Omega = U \tilde{h}'(y - bx), \\ u &= \tilde{u}; \quad u(\infty, y) = \frac{1}{1+b^2} U h(y - bx) + C_1 \\ \tilde{u}(\infty, y) &= \frac{1}{1+b^2} U \tilde{h}(y - bx), \\ \tilde{v}(\infty, y) &= \frac{b}{1+b^2} U \tilde{h}(y - bx), \\ \tilde{p}(\infty, y) &= 0, \quad \tilde{u}(+0, y) = u_0(y), \\ \tilde{v}(+0, y) &= v_+(y) - v_c \equiv \tilde{v}_+(y). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

The solution of equations (11) can be written down immediately in the form of definite-integral relations between  $u_0(y)$  and  $v_-(y)$ . One can consider these as resulting from a distribution of sinks along the  $y$ -axis, of strength  $2u_0(y)$  or from a distribution of vortices of strength  $2v_-(y)$ . The results, which are strictly equivalent, are

$$u_0(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_-(\eta) d\eta}{y - \eta} \quad \text{and} \quad v_-(y) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_0(\eta) d\eta}{y - \eta} \quad (14)$$

where the integrals are Cauchy principal values.

The solution of equations (13) can be constructed by the same technique after a particular solution of the Poisson equation is subtracted out. A suitable rotational flow for this purpose is the parallel shear flow far downstream, given by  $\tilde{u}(\infty, y)$ ,  $\tilde{v}(\infty, y)$  in equations (13). In other words, let

$$\tilde{u} = u^{(1)} + u^{(2)} \quad \text{with} \quad u^{(2)} = \frac{1}{1+b^2} U \tilde{h}(y - bx) \quad (15)$$

and

$$\tilde{v} = v^{(1)} + v^{(2)} \quad \text{with} \quad v^{(2)} = \frac{b}{1+b^2} U \tilde{h}(y - bx). \quad (16)$$

Then, with  $\tilde{w} = w^{(1)} + w^{(2)}$ , one has for the downstream region,

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 w^{(1)} &= 0, & u^{(1)}(\infty, y) &= 0 = v^{(1)}(\infty, y), \\ u^{(1)}(+0, y) &= u_0(y) - u^{(2)}(0, y) = u_0(y) - \frac{1}{1+b^2} U \tilde{h}(y), \\ v^{(1)}(+0, y) &= \tilde{v}_+(y) - v^{(2)}(0, y) = \tilde{v}_+(y) - \frac{b}{1+b^2} U \tilde{h}(y). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

The relations analogous to equations (14) are then

$$\left. \begin{aligned} u_0(y) - \frac{1}{1+b^2} U \tilde{h}(y) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{v}_+(\eta) - U \tilde{h}(\eta) b/(1+b^2)}{y-\eta} d\eta \\ \text{and} \\ \tilde{v}_+(y) - \frac{b}{1+b^2} U \tilde{h}(y) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_0(\eta) - U \tilde{h}(\eta)/(1+b^2)}{y-\eta} d\eta. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Thus, the velocity components upstream of the blade row are definitely related to one another, while those downstream are related in a way that involves the total-pressure-rise function  $\tilde{h}(y)$ .

All the small-perturbation analyses of the rotating-stall phenomenon are basically the same up to this point, although some of the authors have not made use of the steady-flow coordinate system, and have had to look for those special unsteady solutions that do not grow or decay as they propagate. At this point one has just two relations, equations (14) and (18), between four unknown functions,

$$u_0(y), \quad v_-(y), \quad \tilde{v}_+(y), \quad \text{and} \quad \tilde{h}(y).$$

The other two relations needed may be called the 'blade-characteristic' relations; it is in the choice of these that our ignorance of the precise nature of stalled flow becomes apparent and in which the various analyses of the phenomenon diverge from one another.

Before proceeding to discuss the various assumptions that have been made regarding blade characteristics, it may be of interest to consider briefly the physical and mathematical natures of the solutions sought. The fundamental unknown function is the pressure rise  $\tilde{h}(y)$ , which describes the loading of the blades. The equations derived above state the relations that exist between this loading and the induced velocities  $u_0(y)$ ,  $v_-(y)$ , and  $\tilde{v}_+(y)$ . The blade-characteristic relation will tell how the loading is affected by variations of the velocity and flow direction at the blade row; i.e., ultimately, how  $\tilde{h}(y)$  is affected by the



same induced velocity components. Thus, the problem is strictly a homogeneous one: What nonuniform blade loading function induces such velocity components as just to support itself?

There is an analogous problem in the realm of lifting-line wing theory: What spanwise circulation distribution induces such a downwash distribution as just to support itself? It is easy to show (and seems physically obvious) that for unstalled wings PRANDTL's equation admits no trivial solution to this problem. If the slope of the section lift curve is negative, however, the homogeneous Prandtl equation has infinitely many eigen-solutions, but only for eigen-values of the slope [11]. One is not surprised to find that the rotating-stall problem has analogous solutions, which will be discussed farther below.

### Blade-Characteristic Relations of Airfoil Type

In References [4] and [5], the two additional relations needed to connect the upstream and downstream regions of flow were carried over from airfoil theory. It was envisaged that, even in conditions of partial stall, the most important force acting on a blade would be the lift, or more precisely, the component arising from circulation. This is the force that, in a stationary cascade, would produce a pure deflection of the flow without gain or loss of total pressure; in a moving cascade, of course, it results in a change of total pressure. Taking into account this force alone, the first blade-characteristic relation was written by equating the rise of total head to the axial force exerted by the moving blade. Since the circulation per unit length of the discontinuity sheet is  $v_- - v_+$ , this relation is

$$\left. \begin{aligned} \Delta H(y) &= \rho k U [v_-(y) - v_+(y)] \\ \text{or} \quad h(y) &= \frac{k [v_-(y) - v_+(y)]}{U} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

where  $k U$  denotes the velocity of the blades relative to the moving coordinate system.

The second relation, according to this formulation of the problem, is that connecting the blade circulation  $v_- - v_+$  to the blade angle of attack  $\alpha$ :

$$v_-(y) - v_+(y) = \frac{1}{2} \sigma U \sqrt{1 + (b + k)^2} c_l[\alpha], \quad (20)$$

where  $\sigma$  denotes the solidity of the blade row and  $c_l[\alpha]$  is the lift-coefficient curve of the blades, which is nonlinear, in general. According to the theory of airfoils in cascades, and neglecting unsteady-flow effects on the ground that the wave lengths of flow patterns are large compared to the blade chord (already

neglected), one should use here the mean angle of attack

$$\alpha = \frac{1}{2} (\beta_i + \beta_o).$$

It is easy to compute this angle as the sum of arc tangents and then to linearize

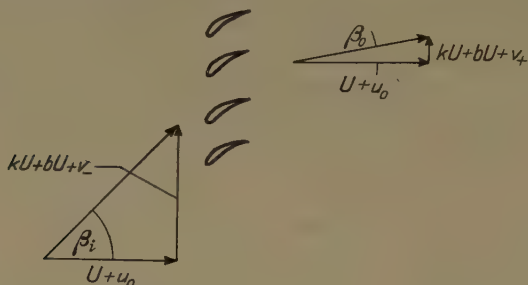


Figure 4

Diagram showing inlet and outlet angles,  $\beta_i$  and  $\beta_o$ .

the result in accordance with the small-perturbation hypothesis. The result gives  $\alpha$  in the form  $\alpha_c + \tilde{\alpha}$  where  $\alpha_c$  corresponds to the uniform turning solution discussed above. The variable part,  $\tilde{\alpha}$ , is found to be

$$\tilde{\alpha} = \frac{1/2 (v_- + \tilde{v}_+) - (k + b) u_0}{U [1 + (b + k)^2]} \quad (21)$$

The second relation may now be written in terms of perturbation quantities:

$$v_-(y) - \tilde{v}_+(y) = \frac{1}{2} \sigma U \sqrt{1 + (b + k)^2} \tilde{c}_l[\tilde{\alpha}], \quad (22)$$

where  $\tilde{c}_l[\tilde{\alpha}]$  is, of course, the lift-coefficient function measured from the constant-turning point  $c_{l_c} \equiv c_l[\alpha_c]$  (Figure 5).

#### *Linearized lift-coefficient curve. Phase lag*

It seems most consistent with the small-perturbation assumption to linearize the curve at this point, i.e., to replace the curve  $\tilde{c}_l[\tilde{\alpha}]$  by its tangent, and to write

$$\tilde{c}_l[\tilde{\alpha}(y)] = m \tilde{\alpha}(y) \quad (m = \text{constant}). \quad (23)$$

This is the type of approximation made in Reference [4] and included in a more general framework in Reference [7]. In both cases, moreover, the phenomenon of time lag was also included in an approximate way. It is well known



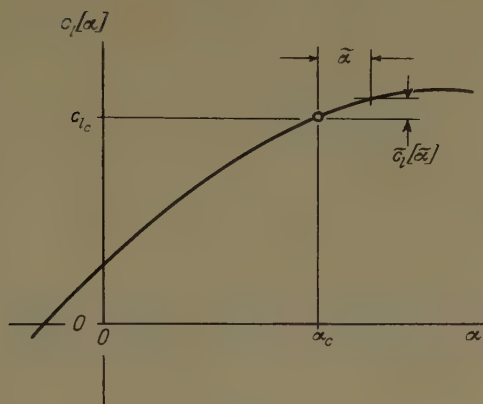


Figure 5

Diagram defining lift-coefficient functions  $c_l[\alpha]$  and  $\tilde{c}_l[\tilde{\alpha}]$ .

that the circulation about an airfoil lags behind its incidence by an interval which is greater at large angles of attack than at small. This time lag is due primarily to the time required for the viscous processes of separation and vortex shedding after a change of incidence, and may be considerably larger than the subsequent time lag in the build-up of circulation according to the theory of airfoils in unsteady motion. It has been studied by MENDELSON [6], who concluded that, approximately, the *phase* lag for any airfoil in oscillatory motion depends on the mean incidence and not on the frequency of oscillation.

This interesting result presumably cannot apply to all frequencies, but was proposed as an approximation for the range of frequencies involved in many cases of stall flutter. In the present application it states that, if the angle-of-attack perturbation is sinusoidal:

$$\tilde{\alpha}(y) = \mathcal{R}\{\alpha_n e^{2\pi i n y/l}\}, \quad (24)$$

where  $\alpha_n$ ,  $n$ , and  $l$  are constants,  $l$  being the circumference of the blade wheel, then the corresponding lift coefficient is

$$\tilde{c}_l(y) = m \mathcal{R}\{\alpha_n e^{i[2\pi n (y/l) + \Delta]}\}, \quad (25)$$

where the phase-lag angle  $\Delta$  depends upon  $\alpha_c$  but not upon  $\alpha_n$  or  $n$ . (Here the symbol  $\mathcal{R}$  has been used to denote the real part of a complex quantity. In what follows, this symbol will be omitted, and real parts always implied.)

To utilize these relations, suppose  $\tilde{h}(y)$  to be expanded in a Fourier series. It must have a period equal to  $l$ . Thus,

$$\tilde{h}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n e^{2\pi i n y/l}. \quad (26)$$

The corresponding induced angle of attack  $\tilde{\alpha}(y)$  then has the form

$$\tilde{\alpha}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{2\pi i n y/l}, \quad (27)$$

and equation (25) states that

$$\tilde{c}_l(y) = m \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{i[2\pi n(y/l) + \Delta]}. \quad (28)$$

But the Fourier coefficients  $\alpha_n$  are easily found by means of the equations derived above, viz., equation (21) for  $\tilde{\alpha}$  together with equations (14) and (18). In particular, one finds that

$$\left. \begin{aligned} v_-(y) + v_+(y) &= \frac{b}{1+b^2} U \tilde{h}(y) - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{U}{1+b^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{h}(\eta) d\eta}{y-\eta} \\ &= U \frac{b+i}{1+b^2} \sum_{n=1}^{\infty} h_n e^{2\pi i n y/l} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

and

$$\left. \begin{aligned} 2u_0(y) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_-(\eta) - \tilde{v}_+(\eta)}{y-\eta} d\eta + \frac{U}{1+b^2} \tilde{h}(y) + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{U b}{1+b^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{h}(\eta) d\eta}{y-\eta} \\ &= \frac{U}{k} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{h}(\eta) d\eta}{y-\eta} + U \frac{1-bi}{1+b^2} \sum_{n=1}^{\infty} h_n e^{2\pi i n y/l} \\ &= U \left\{ -\frac{i}{k} + \frac{1-bi}{1+b^2} \right\} \sum_{n=1}^{\infty} h_n e^{2\pi i n y/l}, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

so that

$$\tilde{\alpha}(y) = \frac{-1/2}{1+(b+k)^2} \left\{ \frac{k}{1+b^2} - i \left[ \frac{b}{k} + 2 + \frac{k b}{1+b^2} \right] \right\} \sum_{n=1}^{\infty} h_n e^{2\pi i n y/l}. \quad (31)$$

The coefficient of  $e^{2\pi i n y/l}$  in this expression is the Fourier coefficient  $\alpha_n$  of equation (27); thus  $\tilde{c}_l(y)$  follows from equation (28), and equation (22) becomes

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_n e^{2\pi i n y/l} = \frac{1}{2} m \sigma k \sqrt{1+(b+k)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{i[2\pi n(y/l) + \Delta]}. \quad (32)$$

This is the complete equation of the problem, according to the present approximations. It is the statement that the loading  $\tilde{h}(y)$  is supported by its own induced velocities. It is, as was mentioned above, a homogeneous equation, and can be satisfied in a nontrivial way only when the successive Fourier



constants on the right- and left-hand sides are equal; i.e.,

$$h_n = \frac{1}{2} m \sigma k \sqrt{1 + (b + k)^2} \alpha_n e^{i\Delta}$$

(33)

with  $\alpha_n$  taken from equation (31). This requires both

$$\left. \begin{aligned} \frac{k^2 b}{1 + b^2} + 2k + b &= \frac{k^2}{1 + b^2} \tan \Delta \\ -\frac{m \sigma}{4} &= \frac{1 + b^2}{k^2} \sqrt{1 + (b + k)^2} \cos \Delta \end{aligned} \right\}$$

(34)

The simultaneous solutions of these two equations, for various assumed values of  $\Delta$ , are plotted in Figure 6. The most convenient independent variable

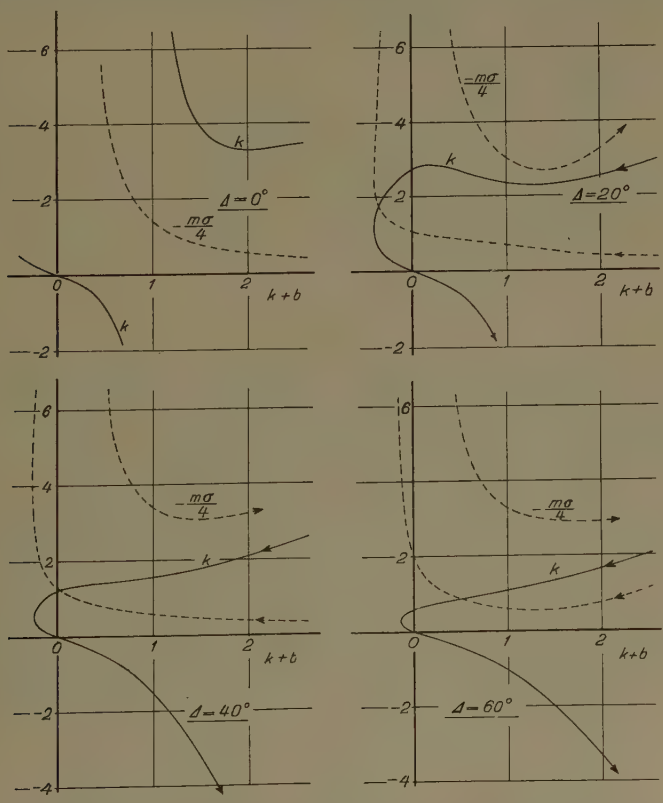


Figure 6

Rotating-stall solutions based on blade-characteristic relations of airfoil type. The abscissa,  $k + b$ , is the tangent of the mean inlet angle  $\beta_i$ . Where double-valued functions occur, corresponding values of  $k$  and  $-m \sigma/4$  are to be read from branches showing arrowheads in the same direction.

is  $k + b$ , which is the tangent of the mean (undisturbed) angle of inflow relative to the moving blade; i.e., the mean value of  $\beta_i$  in Figure 4, say  $\beta_i$ . This is a parameter of clear geometrical meaning, easily estimated from design data for any given blade row in a turbo-machine at any known flow rate. Equations (34) state that, for any given value of this parameter and for any known value of  $\Delta$ , rotating stall can occur only for two special values of  $m\sigma$ —both negative—and that the stall pattern must rotate at certain corresponding speeds  $kU$  relative to the blades.

The solutions plotted in Figure 6 are a generalization of those presented in Reference [4], where a restrictive assumption of small swirl ( $b \ll 1$ ) was made. It is important to notice that no information is obtained from the solution concerning the amplitude, shape, or wave length of the periodic solution  $\tilde{h}(y)$ . This is a result of the linearization of the problem, including the blade-characteristic curve. According to this result, any periodic function  $\tilde{h}(y)$  supports itself by means of its own induced angles, provided only that  $k + b$ ,  $m\sigma$ ,  $k$ , and  $\Delta$  satisfy equations (34).

#### *Nonlinear Lift-Coefficient Curve [5]*

In Reference [5], MARBLE attempted to avoid this situation by introducing a certain nonlinear lift-coefficient function in place of equations (23) and (25). This function, suggested by H. S. TSIEN, is

$$c_l[\alpha] = A\alpha - B\left(\alpha - C\frac{d\alpha}{dt}\right)^3, \quad (35)$$

where  $A$ ,  $B$ , and  $C$  are constants and  $d\alpha/dt$  denotes the time rate of change of  $\alpha$ . He then assumed  $\tilde{h}(y)$  to be a simple sine, and tried to find solutions of the rotating-stall problem in a manner analogous to what has been carried out above. Preliminary results were presented in Reference [5].

In general, the nonlinearity produces higher harmonics in the induced angle  $\tilde{\alpha}$ , even when  $\tilde{h}(y)$  is sinusoidal; thus the problem of satisfying the homogeneous equations is a much more complicated one. In other words, a mathematical difficulty arises in the determination of the Fourier coefficients of  $\tilde{h}(y)$ , since they are not independent of one another. In this situation Professor MARBLE has concluded that it is more fruitful to use a different description of the nonlinear blade characteristic at stalling, which will be discussed below.

#### **Blade-Characteristic Relations of Channel Type**

In some other investigations of the same phenomenon, the concept of the blade row as a lattice of airfoils has been discarded. Instead, the row has been treated as an ensemble of channels.

*Variable-Area Channels ([1] and [9])*

In Reference [1], EMMONS suggested that the effect of partial stalling of the channel between two blades could be represented as a partial constriction of the passage area through the channel. He defined a flow coefficient  $\kappa$  for the passage such that

$$U + u_0 = \text{const} \cdot \kappa. \quad (36)$$

This was based on the assumption that the static pressure behind the blade row would remain uniform in spite of the asymmetric flow pattern, so that the only variable affecting the flow through the row at any point would be the degree of constriction, i.e., the degree of boundary-layer separation. EMMONS further assumed that the flow coefficient is determined by the inlet angle  $\beta_i(y)$ . For the purposes of his investigation he linearized the expression for this angle, viz.,

$$\tilde{\beta}_i = \frac{b+k}{1+(b+k)^2} \left[ \frac{v_-}{(b+k)U} - \frac{u_0}{U} \right] \quad (37)$$

and assumed a linear relationship between  $\kappa$  and  $\beta_i$  in steady flow. For unsteady flow, he assumed that  $\kappa$  increases at a rate proportional to its deviation from this steady-flow value, for any given  $\tilde{\beta}_i$ ; this is equivalent to assuming a certain type of lag between  $\tilde{\beta}_i$  and  $\tilde{\kappa}$ . The result of these assumptions is to provide a blade-characteristic function in the form

$$u'_0(y) = K_1 u_0 - K_2 v_-, \quad (38)$$

where  $K_1$  and  $K_2$  are real constants involving the various constants of proportionality of EMMONS' theory as well as  $k$  and  $b$ .

According to this theory, it will be noted, the flow pattern upstream of the blade row is independent of the flow downstream. Equations (18) are not needed; the only unknowns are  $u_0(y)$  and  $v_-(y)$ , and they are determined by equations (14) and (38). Assume that  $u_0(y)$  is given as a Fourier series (real parts being implied, as before); then

$$u_0(y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n e^{2\pi i n y/l}, \quad (39)$$

$$v_-(y) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_0(\eta) d\eta}{y-\eta} = i \sum_{n=1}^{\infty} u_n e^{2\pi i n y/l} \quad (40)$$

$$u'_0(y) = \frac{2\pi i}{l} \sum_{n=1}^{\infty} n u_n e^{2\pi i n y/l}, \quad (41)$$

so that equation (38) requires

$$\frac{2\pi i}{l} n = K_1 - i K_2. \quad (42)$$



EMMONS has already noted [1] that this means that  $K_1 = 0$  for a flow pattern propagating without growing or subsiding. This amounts to a condition on the slope of the curve of  $\kappa$  versus  $\beta_i$ ; it seems to be analogous to the condition on  $m\sigma$  obtained in the earlier analysis [equation (34)]. He did not mention that it also requires a special relationship between  $n$  and  $K_2$ ; i.e., his theory states that the rotating-stall pattern must be purely sinusoidal with a wave length determined by the constants of his blade-characteristic relations and parameters  $k$  and  $b$ . The nature of this relationship is such that the relative speed  $kU$  decreases with increasing  $n$ , i.e., with decreasing wave length of the pattern, all other parameters being the same.

This theory has been extended by STENNING [9]. STENNING's analysis is basically the same as EMMONS', but an attempt is made, in introducing time lag, to distinguish between 'boundary-layer lag' and the time lag due to inertia of the fluid contained within any blade passage; it is concluded that the latter is more important. The same assumption of uniform downstream static pressure is made and is defended as an approximation for stall patterns whose wave length is not large compared to the circumferential blade spacing.

STENNING's results are similar to EMMONS'. Again two relations are found for steadily rotating stall patterns, one of which is a condition on the slope of the curve of flow coefficient  $\kappa$ . The other (which is fully discussed by STENNING) restricts the steady pattern to a pure sine curve and relates  $k$ ,  $b$ , and  $l/n$  in such a way that sinusoidal patterns of long wave length rotate faster relative to the blades than those of shorter wave length, all other effects being the same. STENNING presents some experimental data, obtained by Professor EMMONS, which seem to support this conclusion regarding the effect of wave length on speed of propagation. There are other experimental data, however (e.g., in Reference [2]), which do not show the same tendency.

#### *Channel Relations Used in Reference [7]*

Besides the 'airfoil' analysis already discussed above, Reference [7] gives a solution based on 'channel' equations different from EMMONS' and STENNING's. Following a suggestion of Professor RANNIE, the author undertook to set up blade-characteristic relations that would resemble the results of steady-flow cascade tests. Such results are sketched in Figure 7, where it is indicated that (1) stalling of a stationary cascade is indicated by a sudden increase of total-head loss,  $-\Delta H$ , plotted against inlet angle  $\beta_i$ , and (2) the outlet angle  $\beta_o$  is substantially constant, for high-solidity cascades, even in the stall. The first of these conclusions must be modified to apply to a moving cascade, of course. For this case the corresponding curve of  $\Delta H$  versus  $\beta_i$  would have the character of Figure 7 (c).

These curves suggest the use of the following blade-characteristic relations:

$$\beta_o = \text{constant, or } \tilde{\beta}_o = 0 \quad (43)$$

and, linearizing the curve of Figure 7(c) at the appropriate uniform-turning

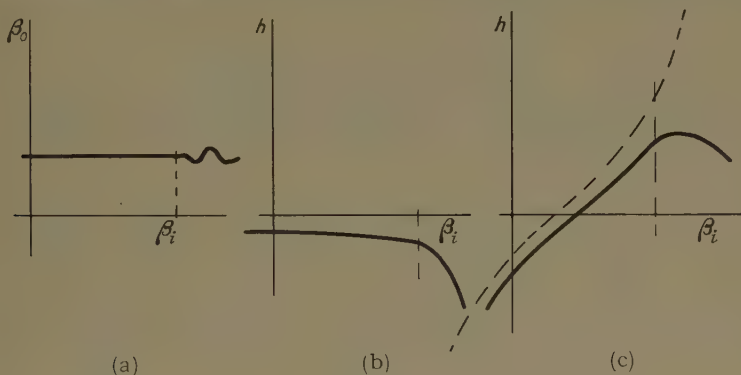


Figure 7

Sketches showing (a) outlet angle and (b) total-pressure rise of typical stationary cascades and (c) corresponding total-pressure rise for rotating cascades.  $\beta_i$  is the inlet angle.

values,

$$\tilde{h} = -M \tilde{\beta}_i \quad (M = \text{constant}). \quad (44)$$

The sign convention adopted here is such that  $M$  is positive for the stalled blade row.

As a generalization of these relations, the type of time lag (phase lag) observed by MENDELSON for airfoils was introduced at this point in Reference [7]. This was, of course, rather arbitrary. It is justified only by analogy with the airfoil result. The process of viscous separation and energy loss described by the channel relations is similar to the process of airfoil stalling, which MENDELSON found to be approximated by a phase lag of this type. Furthermore, it seems to be the only type of lag that can be introduced without automatically restricting the flow pattern to a simple sine. Rather, the enormous generality of Fourier series is maintained; i.e., solutions will be found for which

$$\tilde{\beta}_i(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{2\pi i n y/l} \quad (45)$$

and

$$\tilde{h}(y) = -M \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{i[2\pi n(y/l) + \delta]}, \quad (46)$$

where  $\delta$  is a real constant.

Again the process of solution begins by finding the Fourier coefficients  $\beta_n$  corresponding to the  $h_n$  of equation (26). The linearized expression for  $\tilde{\beta}_0$  is the same as equation (37) but with  $\tilde{\beta}_0$  written in place of  $\tilde{\beta}_i$  and  $\tilde{v}_+$  in place of  $v_-$ ; thus the first channel relation, equation (43), states that  $\tilde{v}_+ = (b+k)u_0$ , and  $\tilde{\beta}_i$ , from equation (37), becomes

$$\tilde{\beta}_i(y) = \frac{1}{1 + (b+k)^2} \cdot \frac{v_- - \tilde{v}_+}{U}. \quad (47)$$

Now, an expression for  $v_- - \tilde{v}_+$ , involving  $u_0$ , is obtained from equations (14) and (18):

$$v_-(y) - \tilde{v}_+(y) = -\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_0(\eta) d\eta}{y - \eta} - \frac{b}{1+b^2} U \tilde{h}(y) + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{U}{1+b^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{h}(\eta) d\eta}{y - \eta}. \quad (48)$$

Another expression for the same quantity follows from equation (14) and (43):

$$v_-(y) - \tilde{v}_+(y) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_0(\eta) d\eta}{y - \eta} - (b+k) u_0(y). \quad (49)$$

One can obviously eliminate  $v_- - \tilde{v}_+$  from these two equations, obtaining

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_0(\eta) d\eta}{y - \eta} - (b+k) u_0(y) = \frac{U}{1+b^2} \left\{ -b \tilde{h}(y) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{h}(\eta) d\eta}{y - \eta} \right\}. \quad (50)$$

If  $u_n$  denote the Fourier coefficients of  $u_0(y)$ , so that

$$u_0(y) = \sum u_n e^{2\pi i n y/l},$$

equation (50) relates  $u_n$  to  $h_n$ :

$$u_n = \frac{U}{1+b^2} \cdot \frac{i+b}{i+b+k} h_n. \quad (51)$$

Now, making use of equation (49) again, one has a simple relation between  $u_n$  and the Fourier coefficients of  $v_- - \tilde{v}_+$ , which in turn are related to  $\beta_n$  in equation (47). Finally, from equation (46) the homogeneous equation of the problem becomes

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} h_n e^{2\pi i n y/l} &= -M \frac{1}{1 + (b+k)^2} \cdot \frac{1}{U} [i - (b+k)] \sum_{n=1}^{\infty} u_n e^{i[2\pi n (y/l) + \delta]} \\ &= -M \frac{1}{1 + (b+k)^2} \cdot \frac{i - (b+k)}{i+b+k} \cdot \frac{i+b}{1+b^2} \sum_{n=1}^{\infty} h_n e^{i[2\pi n (y/l) + \delta]}. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$



This requires both

$$\frac{M}{\sqrt{1+b^2}} = 1 + (b+k)^2 \tag{53}$$

and

$$\tan \delta = \frac{1+b^2-k^2}{b(b+k)^2+2k+b} \tag{54}$$

When equations (53) and (54) are both satisfied, any periodic flow pattern is in equilibrium and rotates steadily. The compatible values of  $M$ ,  $k$ , and  $b+k$

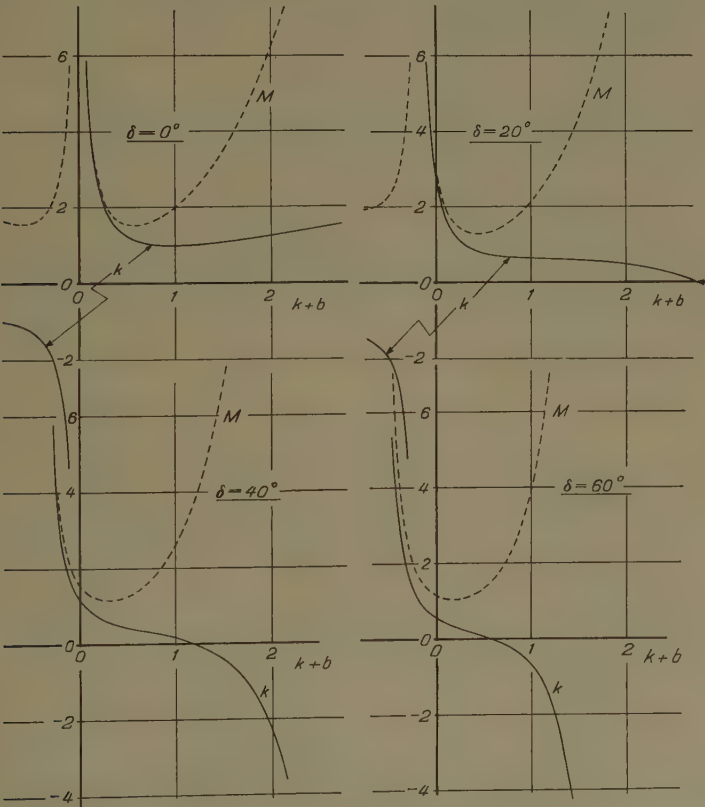


Figure 8

Rotating-stall solutions based on blade-characteristic relations of channel type. The abscissa,  $k + b$ , is the tangent of the mean inlet angle  $\beta_i$ .

are plotted in Figure 8 for several values of the phase-lag angle  $\delta$ . Again the independent variable is  $b + k$ , the tangent of the mean (undisturbed) angle of inflow relative to the blades,  $\tan \beta_i$ . All the interesting values of  $M$  are positive,

which means that the blade row must be so fully stalled as to have a negative characteristic slope, as defined in Figure 7(c). Then rotating stall can occur at a certain relative speed  $k$ , with or without lag.

### Marble's Discontinuous Blade Characteristic

In Reference [8], Professor MARBLE has employed a nonlinear blade characteristic of a most interesting type, namely, a relation exhibiting a discontinuity at the stall. That such characteristics should be used was suggested in Reference [4] but was not carried out. MARBLE's first blade-characteristic relation is a generalization of equation (43); viz.,

$$\tilde{\beta}_0 = \text{const} \cdot \tilde{\beta}_i. \quad (55)$$

His second relation is expressed in terms of the static-pressure rise across the blade row,

$$\Delta p \equiv p(+0, y) - p(-0, y).$$

It is his assumption that this pressure rise varies approximately linearly with the inlet angle  $\beta_i$  below the stall but drops to zero when stalling occurs. This relation is sketched in Figure 9.

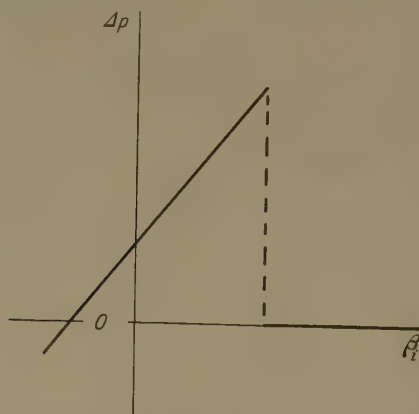


Figure 9

Sketch showing MARBLE's discontinuous blade-characteristic function [8].  $\Delta p$  denotes static-pressure rise and  $\beta_i$  the inlet angle.

For convenience in applying this condition, MARBLE works with the dependent variable  $p(x, y)$  instead of the velocity components used in the previous investigations. Since the small-perturbation approximation is employed, the pressure perturbation satisfies LAPLACE's equation both upstream and downstream of the blade row. MARBLE shows that the angles  $\tilde{\beta}_i$  and  $\tilde{\beta}_o$  can also be

expressed quite simply in terms of the pressure perturbation and its harmonic conjugate. Thus, the boundary-value problem of the two-dimensional blade row is reduced to finding a harmonic function whose real and imaginary parts, along the axis  $x = 0$ , satisfy certain relations derived from equation (55) and the characteristic sketched in Figure 9.

The results of this analysis will not be reproduced here. They consist of the propagation speed ratio  $k$  and the *percentage of circumference stalled*, both as functions of  $k + b$ , the tangent of the mean inlet angle. MARBLE finds that  $k$  is insensitive to variations of  $k + b$  for values of  $k + b$  near 1, which is a typical value for axial-flow compressors. It is interesting to notice that in one particular case that he studies in detail, in which the constant of equation (55) is taken equal to zero, so that this relation coincides with equation (43) of the earlier, SEARS analysis, his curve of  $k$  versus  $k + b$  is identical with the one plotted in Figure 8 for  $\delta = 0$ . Presumably the effects of lag could be introduced into MARBLE's analysis, but this has not been done.

The most interesting result in MARBLE's work is the percentage of circumference stalled, or the ratio of stalled to unstalled length in the periodic flow pattern. This increases rapidly from 0 to 1.0 as  $k + b$  is increased above the value where partial stalling first appears. The slope of this increase depends on the magnitude of the pressure rise  $\Delta p$  across the unstalled portions but seems to be relatively insensitive to the slope of the unstalled portion of the blade characteristic.

### Comparison with Experiment

Practically the only comparison that can be made with experimental results at present is the comparison of measured and predicted rates of stall propagation. Such a comparison is attempted in Figure 10, where the curves of  $k$  versus  $k + b$  are collected from Figures 6 and 8. The experimental points in this figure are taken from the report of IURA and RANNIE [2]. They represent the conditions of the rotor and stator rows of their experimental compressor at the onset of rotating stall. It is not known whether the rotor or stator rows were responsible for the stalling. To be more precise, it must be admitted that the present single-row theories are only roughly applicable to IURA's and RANNIE's three-stage machine, and the attempted comparison is based on the assumptions (1) that either stator *or* rotor rows (but not both) must be responsible for the onset of rotating stall and (2) that the presence of other rows does not seriously affect the results, as compared to those of the idealized single-row model.

The dashed lines emanating from the experimental points in Figure 10 show the approximate variation of  $k$  with  $k + b$ , for rotors and stators, respectively, for flow quantities smaller than that at which rotating stall commences.



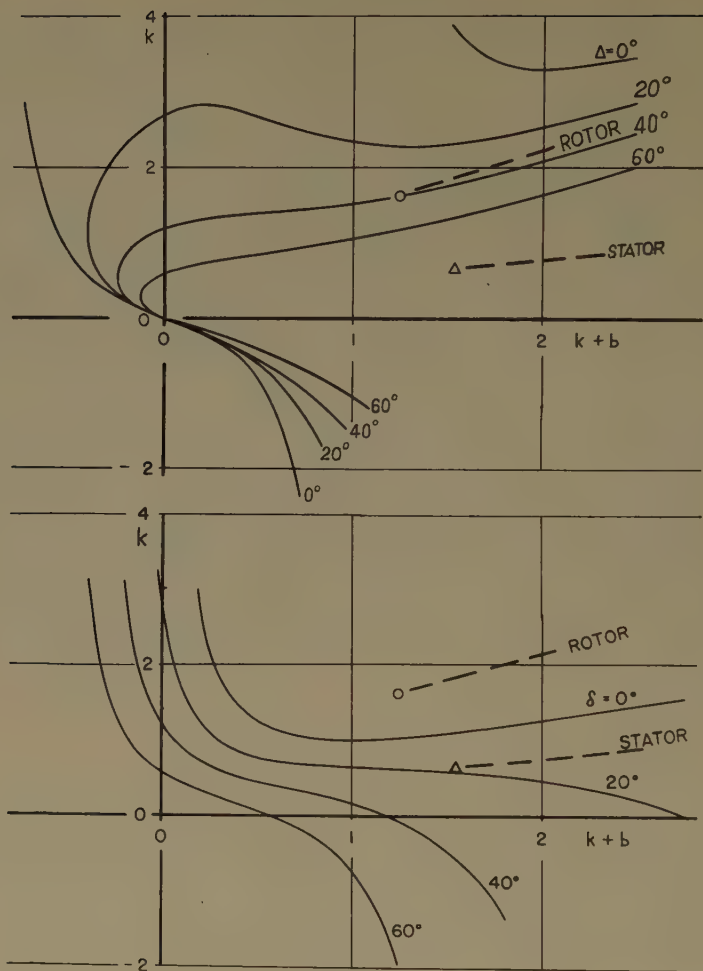


Figure 10

Comparison of measured rates of stall rotation [2] with theoretical values based on airfoil (above) and channel (below) types of blade characteristics, from Figures 6 and 8. The abscissa,  $k + b$ , is the tangent of the mean inlet angle  $\beta_i$ . The experimental points and dashed lines are from Reference [2], computed for rotors and stators, respectively.

It is seen that the experimental points fall within the range of the theoretical diagrams based on either 'airfoil' or 'channel'-type blade characteristics. However, the point denoting rotor conditions requires either negative lag or excessive positive lag if the 'channel' theory is adopted, while the point denoting stator conditions requires a rather large value of the lag (compared

to MENDELSON'S observations) in the 'airfoil' theory. There is an interesting coincidence between the experimental curve for rotor conditions (the upper dashed line) and the theoretical curve for constant phase lag  $\Delta$  in Figure 10a. Nevertheless, it is clear that the available comparison with experimental results does not lead to any general conclusions.

### Discussion and Conclusions

In this paper, several attempts to explain theoretically the phenomenon of rotating stall have been described. These are all based on the assumptions of a single row of closely spaced blades and the small perturbation type of flow. They are, therefore, probably inadequate to describe the conditions observed in multistage axial compressors. On the other hand, they provide at least a qualitative explanation of the phenomenon, and they are in agreement in their conclusion that steadily rotating patterns may occur in stalled, rigid blade rows.

In addition to the limitations imposed by their simplifying assumptions, these theories all have the drawback that they involve several unknown parameters. In the analysis based on 'airfoil' relations, for example, both the lift-curve slope  $m$  and the lag angle  $\Delta$  are involved. Unfortunately, one's understanding of stalled-airfoil flow is insufficient to determine either of these quantities with assurance. Each of the analyses discussed has this drawback, although the governing parameters are expressed in other terms. It appears that more definitive theoretical and experimental work on stalled airfoils and (or) channels is needed.

Presumably, the several different analyses, being alike in basic structure but differing in the assumed blade-characteristic relations, have relative advantages and disadvantages, but it is difficult to choose between them on the basis of the available experimental data. The present author believes that there is a considerable virtue in the assumption of MENDELSON'S type of lag, i.e., phase lag independent of frequency, since this avoids the limitation of flow patterns to purely sinusoidal ones. This limitation has occurred, probably unintentionally, in the work of EMMONS [1] and STENNING [9]. Undoubtedly MARBLE'S use of a discontinuous characteristic [8] provides information unavailable in the linearized treatments. It seems questionable whether the blade-characteristic function of Figure 9 is realistic, however, for the static-pressure rise through a blade row surely does not vanish when stalling occurs. In this connection, the contrast between MARBLE'S assumptions and those of EMMONS and STENNING is striking: the former assumes a violent reduction of static pressure downstream of the stalled portions of the blade row, while the latter assume that the same quantity is uniformly distributed. It should not be difficult to make a choice between these two assumptions on the basis of suitable future experimental observations.

### Addendum Supplied October 1955

Since the manuscript of the present paper was submitted for publication, additional investigations of rotating stall, including interesting experimental results, have appeared (References [12], [13], [14], [15], [16]). The newer experimental results (References [13] and [16]) are particularly pertinent to any assessment of the theories, because they have been obtained in single-row configurations, which more closely resemble the theoretical models. Also, since static-pressure fluctuations were measured before and behind the rotors in these tests, these results cast considerable light on the assumptions made by MARBLE and STENNING in their theories.

The agreement between measured rates of stall propagation and those predicted by the theories of Reference [7] is similar to that shown here in Figure 10. (The present author does not agree with the way this comparison was carried out in Reference [16] and has made his own comparison, to which the preceding statement applies.) Fortunately, the question of whether rotor or stator was stalled, which complicated the matter in Figure 10, does not occur in these single-row comparisons. The authors of Reference [13] conclude, in part: 'The measured stall-propagation rates can be made to agree with theoretical predictions by adjusting certain theoretically undetermined factors appearing in the theories.'

### REFERENCES

- [1] EMMONS, H. W., PEARSON, C. E., and GRANT, H. P., *Compressor Surge and Stall Propagation*, Trans. A. S. M. E., 77, 455-467 (1955).
- [2] IURA, T., and RANNIE, W. D., *Observations of Propagating Stall in Axial-Flow Compressors*, Trans. A. S. M. E., 76, 463-471 (1954).
- [3] HUPPERT, MERLE C., and BENSER, WILLIAM A., *Some Stall and Surge Phenomena in Axial-Flow Compressors*, J. aeron. Sci. 20, 835-845 (1953).
- [4] SEARS, W. R., *On Asymmetric Flow in an Axial-Flow Compressor Stage*, J. appl. Mech. 20, 57-62 (1953).
- [5] MARBLE, FRANK E., *Propagation of Stall in Compressor Blade Rows*, Presented at 21st Annual Meeting, Inst. aeron. Sci., New York, January 26, 1953.
- [6] MENDELSON, ALEXANDER, *Effect of Aerodynamic Hysteresis on Critical Flutter Speed at Stall*, J. aeron. Sci. 16, 645-652 (1949).
- [7] SEARS, W. R., *A Theory of 'Rotating Stall' in Axial-Flow Compressors*, Grad. School aeron. Eng., Cornell Univ., Ithaca, N.Y., January 1, 1953. Prepared under Contract AF 33 (038)-21406, U.S. Air Force, Office Sci. Res., R. and D. Command, Baltimore, Md.
- [8] MARBLE, FRANK E., *Propagation of Stall in a Compressor Blade Row*, J. aeron. Sci. 22, 541-554 (1955).
- [9] STENNING, ALAN H., *Stall Propagation in a Cascade of Airfoils*, Gas Turbine Lab., Mass. Inst. Tech., Cambridge, Mass., Rep. No. 25, May, 1954. Prepared under Contract NAW-6303, Nat. Advis. Comm. Aeron., Washington, D.C.



- [10] LAMB, H., *Hydrodynamics*, 6th edition (Cambridge University Press, London 1932), pp. 243-244.
- [11] SEARS, W. R., *A New Treatment of the Lifting-Line Wing Theory, with Applications to Rigid and Elastic Wings*, Quart. appl. Math. 6, 239-255 (1948). See especially pp. 243-244.
- [12] SMITH, A. G., and FLETCHER, P. J., *Observations on the Surging of Various Low-Speed Fans and Compressors*, Nat. Gas Turbine Estab. Memo. No. M. 219 (July 1954).
- [13] COSTILLOW, ELEANOR L., and HUPPERT, MERLE C., *Rotating-Stall Characteristics of a Rotor with High Hub-Tip Radius Ratio*, Nat. Advis. Comm. Aeron. Techn. Note No. 3518 (1955).
- [14] STENNING, ALAN H., *Stall Propagation in Cascades of Airfoils*, J. aeron. Sci. 21, 711-713 (1954).
- [15] STENNING, A. H., *Stall Propagation in Axial Compressors*, Gas Turbine Lab., Mass. Inst. Techn., Cambridge, Mass., Rep. No. 28 (April 1955). Prepared under Contract NAW-6375, Nat. Advis. Comm. Aeron., Washington, D. C.
- [16] MONTGOMERY, STEPHEN R., and BRAUN, LT. JOSEPH J., *An Investigation of Rotating Stall in a Single Stage Axial Compressor*, Gas Turbine Lab., Mass. Inst. Techn., Cambridge, Mass., Rep. No. 29 (May 1955). Prepared under Contract NAW-6375, Nat. Advis. Comm. Aeron., Washington, D. C.

### Abstract

The phenomenon known as 'rotating stall' is described. Basically, it involves a nonuniform pattern of flow, steadily rotating relative to both the fixed and the rotating blades of axial-flow compressors. Attempts to analyze the phenomenon by means of small-perturbation theories are reviewed. It is shown that the work of several investigators can be included in a single formulation and that they differ only in the type of blade-characteristic relations assumed. The present author's analyses based on linearized 'airfoil' and 'channel' relations are presented in detail. The various theories coincide in the qualitative conclusion that self-induced rotating-stall patterns can occur in stalled, rigid blade rows. A comparison with available experimental results is inconclusive, so far as a choice between the several theories is concerned.

### Zusammenfassung

Die als «umlaufende Abreißströmung» bekannte Erscheinung wird beschrieben, welche durch ein Strömungsbild gekennzeichnet ist, das sowohl bezüglich des Stators wie auch des Rotors in einem axialen Verdichter stetig umläuft. Eine Übersicht der theoretischen Ansätze zur Beschreibung dieser Erscheinung im Rahmen einer Störungsrechnung ist gegeben. Es kann gezeigt werden, dass die meisten Ansätze einheitlich behandelt werden können und sich nur in der angenommenen Schaufelcharakteristik unterscheiden. Berechnungen des Verfassers auf Grund von linearisierten «Auftriebskurven» und «Kanalbeziehungen» sind ausführlich dargestellt. Alle Theorien liefern das gleiche qualitative Ergebnis eines selbstinduzierten, umlaufenden Strömungsbildes in einem starren Gitter mit abgerissener Strömung. Ein Vergleich mit Versuchen ergibt vorläufig keine zwingenden Schlüsse betreffend die beste Wahl zwischen den Theorien.

(Received: August 30, 1954.)

# Über den Fehler des Runge-Kutta-Verfahrens für die numerische Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen $n$ -ter Ordnung

VON WALTER GAUTSCHI, Basel<sup>1)</sup>

Die klassischen Runge-Kutta-Formeln zur numerischen Integration eines Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung können im Prinzip auch für Differentialgleichungen höherer Ordnung benutzt werden, indem eine Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung in bekannter Weise als ein spezielles System von  $n$  Differentialgleichungen erster Ordnung aufgefasst wird. Den entsprechenden Approximationsfehler hat BIEBERBACH [2]<sup>2)</sup> mit Hilfe der Taylor-Entwicklung abgeschätzt<sup>3)</sup>. Indessen sind in neuerer Zeit von ZURMÜHL [7], [8]<sup>4)</sup> allgemeinere Runge-Kutta-Formeln aufgestellt worden, die die numerische Integration von Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung auf direktem Wege durchführen. Die Genauigkeit der Approximation erfährt dadurch, besonders für  $n > 2$ , eine bemerkenswerte Steigerung [7]. Im folgenden soll auch zur Zurmühlschen Fassung der Runge-Kutta-Formeln eine Fehlerabschätzung (für den ersten Integrationsschritt) mitgeteilt werden<sup>5)</sup>.

## Die Runge-Kutta-Formeln für Differentialgleichungen $n$ -ter Ordnung

Sei die Differentialgleichung in der nach der höchsten Ableitung aufgelösten Form

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1)$$

gegeben und an der Stelle  $x = x_0$  das System von Anfangswerten

$$y^{(\nu)}(x_0) = y_0^{(\nu)} \quad (\nu = 0, 1, \dots, n-1) \quad (2)$$

<sup>1)</sup> Mathematische Anstalt der Universität.

<sup>2)</sup> Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis S. 461.

<sup>3)</sup> Von M. LOTKIN [5] ist eine weitere, aber unvollständige Fehlerabschätzung durchgeführt worden.

<sup>4)</sup> Vgl. auch [4], S. 28.

<sup>5)</sup> Inzwischen sind für  $n = 1$  von ALBRECHT [1] und für beliebiges  $n$  von BUKOVICS [3], ausgehend von anderen Voraussetzungen, weitere Fehlerabschätzungen veröffentlicht worden, die im Prinzip auch die Fehlerfortpflanzung berücksichtigen. Über den Einfluss der Fehlerfortpflanzung vgl. auch eine Bemerkung von RUTISHAUSER [6].

vorgeschrieben. Wir setzen<sup>1)</sup>

$$h = x - x_0,$$

$$T_\nu(\alpha) = \gamma_0^{(\nu)} + \frac{\alpha h}{1!} \gamma_0^{(\nu+1)} + \dots + \frac{(\alpha h)^{n-\nu-1}}{(n-\nu-1)!} \gamma_0^{(n-1)} \quad (\nu = 0, 1, \dots, n-1),$$

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= f[x_0, T_0(0), \dots, T_\mu(0), \dots, T_{n-1}(0)], \\ k_2 &= f\left[x_0 + \frac{h}{2}, T_0\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{h^n}{2^n n!} k_1, \dots, T_\mu\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{h^{n-\mu}}{2^{n-\mu}(n-\mu)!} k_1, \dots, T_{n-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{h}{2} k_1\right], \\ k_3 &= f\left[x_0 + \frac{h}{2}, T_0\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{h^n}{2^n n!} k_1, \dots, T_\mu\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{h^{n-\mu}}{2^{n-\mu}(n-\mu)!} k_1, \dots, T_{n-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{h}{2} k_2\right], \\ k_4 &= f\left[x_0 + h, T_0(1) + \frac{h^n}{n!} k_3, \dots, T_\mu(1) + \frac{h^{n-\mu}}{(n-\mu)!} k_3, \dots, T_{n-1}(1) + h k_3\right] \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

und ferner

$$\bar{k}_\nu = \sum_{\varrho=1}^4 \gamma_{\nu\varrho} k_\varrho \quad (\nu = 0, 1, \dots, n-1) \quad (4)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{\nu 1} &= \frac{p^2}{(p+1)(p+2)}, \quad \gamma_{\nu 2} = \gamma_{\nu 3} = \frac{2p}{(p+1)(p+2)}, \\ \gamma_{\nu 4} &= \frac{2-p}{(p+1)(p+2)} \quad (p = n-\nu). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Durch das Runge-Kutta-Verfahren werden nun für die  $\nu$ -ten Ableitungen  $y^{(\nu)}(x)$  der gesuchten Lösungsfunktion in der folgenden Weise Näherungsfunktionen  $y_a^{(\nu)}(x)$  definiert:

$$y_a^{(\nu)}(x_0 + h) = T_\nu(1) + \frac{h^{n-\nu}}{(n-\nu)!} \bar{k}_\nu \quad (\nu = 0, 1, \dots, n-1). \quad (6)$$

### Voraussetzungen

Wir definieren  $n$  Funktionen  $f_\lambda$  der  $n+1$  Variablen  $x, y_1, \dots, y_n$  durch

$$f_\lambda = y_{1\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n-1), \quad f_n = f(x, y_1, \dots, y_n).$$

<sup>1)</sup> Die folgenden Bezeichnungen sind gegenüber den Darstellungen in [4] und [7] leicht geändert.

Es sei  $R$  ein Bereich

$$(R) \quad |x - x_0| \leq a, \quad |y_\lambda - y_0^{(\lambda-1)}| \leq b_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n)$$

des  $(x, y_1, \dots, y_n)$ -Raumes, in dem die Funktion  $f(x, y_1, \dots, y_n)$  und ihre Ableitungen  $\partial^l f / \partial x^i \partial y_1^{j_1} \dots \partial y_n^{j_n}$ ,  $0 < l \leq 4$ , eindeutig und stetig sind. Wir setzen voraus, dass in  $R$

$$|f_\lambda| \leq N \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n), \quad (7)$$

$$\left| \frac{\partial^l f}{\partial x^i \partial y_1^{j_1} \dots \partial y_n^{j_n}} \right| \leq \frac{M}{N^{j_1 + \dots + j_n - 1}} \quad (0 < l \leq 4) \quad (8)$$

gilt<sup>1)</sup> und dass ferner die Ungleichungen

$$N \sum_{\kappa=1}^{n-\nu} \frac{a^\kappa}{\kappa!} \leq b_{\nu+1} \quad (\nu = 0, 1, \dots, n-1), \quad M \sum_{\kappa=1}^n \frac{a^\kappa}{\kappa!} \leq 1 \quad (9)$$

erfüllt sind. Die ersten  $n$  Ungleichungen in (9) sorgen unter anderem dafür, dass für  $|x - x_0| \leq a$  die Werte  $[x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)]$  der exakten Lösungsfunktion und ihrer Ableitungen innerhalb des Bereiches  $R$  bleiben. Ausserdem haben sie, wegen (7), zur Folge, dass  $|k_\varrho| \leq N$  ( $1 \leq \varrho \leq 4$ ) ist. Die letzte Ungleichung in (9) erweist sich im Laufe der Fehlerabschätzung als zweckmässig.

### Abschätzung des Fehlers

Sei

$$\varepsilon_\nu(h) = y_a^{(\nu)}(x_0 + h) - y^{(\nu)}(x_0 + h) \quad (\nu = 0, 1, \dots, n-1)$$

der Approximationsfehler der  $\nu$ -ten Ableitung. Aus der Taylor-Entwicklung

$$y^{(\nu)}(x_0 + h) = T_\nu(1) + \frac{h^{n-\nu}}{(n-\nu)!} f_{h=0} + \frac{h^{n-\nu+1}}{(n-\nu+1)!} \cdot \frac{df}{dh} \Big|_{h=0} + \dots$$

und aus (6) ergibt sich

$$\varepsilon_\nu(h) = \frac{h^{n-\nu}}{(n-\nu)!} \bar{k}_\nu - \frac{h^{n-\nu}}{(n-\nu)!} f_{h=0} - \frac{h^{n-\nu+1}}{(n-\nu+1)!} \cdot \frac{df}{dh} \Big|_{h=0} \dots \quad (10)$$

Es ist bekannt [7], dass für  $m = 0, 1, \dots, n - \nu + 2$  und  $n \geq 2$

$$\frac{d^m}{dh^m} \varepsilon_\nu(h) \Big|_{h=0} = 0 \quad (\nu = 0, 1, \dots, n-2)$$

und für  $m = 0, 1, \dots, 4$  und  $n \geq 1$

$$\frac{d^m}{dh^m} \varepsilon_{n-1}(h) \Big|_{h=0} = 0$$

<sup>1)</sup> (7), (8) sind im wesentlichen die Bieberbachschen Voraussetzungen, bis auf den Unterschied, dass hier die Abschätzung (8) nur für die Funktion  $f_n$  und nicht für sämtliche  $f_\lambda$  gelten muss.



ist. Daher folgt aus (10)

$$\varepsilon_\nu(h) = \left\{ \frac{1}{3! (n-\nu)!} \cdot \frac{d^3 k_\nu}{dh^3} \Big|_{\vartheta_1 h} - \frac{1}{(n-\nu+3)!} \cdot \frac{d^3 f}{dh^3} \Big|_{\vartheta_2 h} \right\} h^{n-\nu+3} \quad (11)$$

$$(n \geq 2, 0 \leq \nu \leq n-2),$$

$$\varepsilon_{n-1}(h) = \left\{ \frac{1}{4!} \cdot \frac{d^4 \bar{k}_{n-1}}{dh^4} \Big|_{\vartheta_3 h} - \frac{1}{5!} \cdot \frac{d^4 f}{dh^4} \Big|_{\vartheta_3 h} \right\} h^5 \quad (n \geq 1) \quad (12)$$

für gewisse  $\vartheta_i$  mit  $0 < \vartheta_i < 1$ . Aus (11), (12), (4) und (5) erhält man für  $n \geq 2$  die Abschätzungen

$$|\varepsilon_\nu(h)| \leq \frac{|h|^{p+3}}{6(p+3)!} \left\{ \begin{aligned} & p^2 (2 \max |k_2'''| + 2 \max |k_3'''| + \max |k_4'''|) \\ & + p (6 \max |k_2'''| + 6 \max |k_3'''| + \max |k_4'''|) \\ & - 6 (\max |k_4'''| - \max |f'''|) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$(p = n - \nu; \nu = 0, 1, \dots, n-2)$$

und für  $n \geq 1$  die Abschätzung

$$|\varepsilon_{n-1}(h)| \leq \frac{|h|^5}{6 \cdot 5!} \{ 10 \max |k_2^{IV}| + 10 \max |k_3^{IV}| + 5 \max |k_4^{IV}| + 6 \max |f^{IV}| \}. \quad (14)$$

Striche bedeuten hier Ableitungen nach  $h$ . Ferner sind alle Maxima für  $|h| \leq a$  zu nehmen.

Führt man die Differentiationen in (13) und (14) aus, und schätzt man die gewonnenen Ausdrücke mit Hilfe von (7), (8) und (9) ab, so erhält man nach einiger Rechnung folgende Resultate: Es gilt für  $n \geq 2$

$$|\varepsilon_\nu(h)| \leq \frac{1}{6(p+3)!} [p^2 G(n) + p H(n) - K(n)] |h|^{p+3} \quad (15)$$

$$(p = n - \nu; \nu = 0, 1, \dots, n-2)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} G(n) &= \frac{1}{64} \{ 737 n^3 + 3555 n^2 + 3671 n + 361 + 144 \delta_2(n) (n+1) \} M N \\ &+ \frac{1}{16} (273 n^2 + 642 n + 297) M^2 N + \frac{3}{2} (n+1) M^3 N, \\ H(n) &= \frac{1}{64} \{ 965 n^3 + 4599 n^2 + 4435 n + 69 + 144 \delta_2(n) (n+1) \} M N \\ &+ \frac{1}{16} (369 n^2 + 858 n + 369) M^2 N + \frac{3}{2} (n+1) M^3 N, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$K(n) = \frac{1}{64} \{ 3354 n^3 + 15894 n^2 + 18198 n + 4578 + 864 \delta_2(n) (n+1) \} M N \\ + \frac{1}{16} (966 n^2 + 2244 n + 1182) M^2 N + 3 (n+1) M^3 N$$

und für  $n \geq 1$

$$|\varepsilon_{n-1}(h)| \leq \left[ \frac{M N}{184320} \{ 42401 n^4 + 237440 n^3 + 336570 n^2 + 73112 n \right. \\ - 11107 + 32 \delta_1(n) (2050 n^3 + 8022 n^2 + 6093 n + 31) \\ + 24 \delta_2(n) (1060 n^2 + 2379 n + 523) + 3840 \delta_3(n) (n+1) \} \\ + \frac{M^2 N}{11520} \{ 7721 n^3 + 27621 n^2 + 23163 n + 3263 \\ + 6 \delta_1(n) (805 n^2 + 1712 n + 667) + 576 \delta_2(n) (n+1) \} \\ + \frac{M^3 N}{960} \{ 293 n^2 + 604 n + 275 + 36 \delta_1(n) (n+1) \} \\ \left. + \frac{M^4 N}{120} (n+1) \right] |h|^5, \quad (17)$$

wenn allgemein

$$\delta_k(n) = \begin{cases} 0 & (n \leq k) \\ 1 & (n > k) \end{cases} \quad (18)$$

gesetzt wird.

Für  $n = 1$  ergibt sich aus (17) die Schranke von BIEBERBACH<sup>1)</sup>

$$|y_a - y| \leq [M N 3,680642361 + M^2 N 5,3618055... + M^3 N 1,220833... \\ + M^4 N 0,01666...] |h|^5 \leq 5,37 M N \frac{M^4 - 1}{M - 1} |h|^5 \quad (n = 1).$$

Für den praktisch wichtigen Fall  $n = 2$  erhält man

$$|y_a - y| \leq [M N 1,086 + M^2 N 0,7188 + M^3 N 0,025] |h|^5 \\ \leq 1,09 M N \frac{M^3 - 1}{M - 1} |h|^5, \\ |y'_a - y'| \leq [M N 32,57 + M^2 N 23,07 + M^3 N 2,879 + M^4 N 0,025] |h|^5 \\ \leq 32,6 M N \frac{M^4 - 1}{M - 1} |h|^5 \quad (n = 2).$$

<sup>1)</sup> [2], S. 234.

Man verifiziert leicht, dass für  $n \geq 2$

$$G(n) \leq 16,64 (n+1)^3 M N \frac{M^3 - 1}{M - 1}, \quad H(n) \leq 20,97 (n+1)^3 M N \frac{M^3 - 1}{M - 1}$$

gilt, so dass man aus (15) die schwächere, aber einfachere Abschätzung erhält:

$$\left. \begin{aligned} |\varepsilon_\nu(h)| &\leq \frac{p}{(p+3)!} (2,78 p + 3,50) (n+1)^3 M N \frac{M^3 - 1}{M - 1} |h|^{p+3} \\ & \quad (p = n - \nu; \nu = 0, 1, \dots, n - 2; n \geq 2). \end{aligned} \right\} \quad (15')$$

Ähnlich kann (17) zu

$$|\varepsilon_{n-1}(h)| \leq 0,453 (n+1)^4 M N \frac{M^4 - 1}{M - 1} |h|^5 \quad (n \geq 1) \quad (17')$$

vereinfacht werden.

### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] J. ALBRECHT, *Beiträge zum Runge-Kutta-Verfahren*, Z. angew. Math. Mech. 35, 100–110 (1955).
- [2] L. BIEBERBACH, *On the Remainder of the Runge-Kutta Formula in the Theory of Ordinary Differential Equations*, ZAMP 2, 233–248 (1951).
- [3] E. BUKOVICS, *Beiträge zur numerischen Integration III*, Mh. Math. 58, 258–265 (1954).
- [4] L. COLLATZ, *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen* (Springer-Verlag, Berlin, Göttingen und Heidelberg 1951).
- [5] M. LOTKIN, *On the Accuracy of Runge-Kutta's Method*, MTAC 5, 128–133 (1951).
- [6] H. RUTISHAUSER, *Bemerkungen zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen n-ter Ordnung*, ZAMP 6, 497–498 (1955).
- [7] R. ZURMÜHL, *Runge-Kutta Verfahren zur numerischen Integration von Differentialgleichungen n-ter Ordnung*, Z. angew. Math. Mech. 28, 173–182 (1948).
- [8] R. ZURMÜHL, *Runge-Kutta Verfahren unter Verwendung höherer Ableitungen*, Z. angew. Math. Mech. 32, 153–154 (1952).

### Summary

For the numerical solution of an ordinary differential equation of the  $n$ -th order (1) with the initial conditions (2) ZURMÜHL has developed general Runge-Kutta formulas which integrate this equation directly without separating it into a system of  $n$  equations of the first order. In the present paper some estimations of the errors of this Runge-Kutta method are given, which are valid for any value of  $n$ . It is assumed that the function  $f(x, y, y', \dots)$  on the right side of the differential equation and its partial derivatives up to the fourth order are one-valued and continuous in a certain neighbourhood of the initial values and that bounds of these functions are known.

(Eingegangen: 7. Juli 1954.)

# Eine genäherte Behandlung des schweren symmetrischen Kreisels in nicht-Eulerschen Koordinaten

Von ERICH SPONDER, Chromepet, South India<sup>1)</sup>

## Einleitung

In zahlreichen technischen Anwendungen bildet der Kiesel ein ausschlaggebendes Glied in einem mehrläufigen Körperverband, dessen (dynamische) Stabilität hinsichtlich einer bestimmten Gleichgewichtslage sehr oft von besonderem Interesse ist. Zu deren Feststellung bedient man sich gerne der Methode der kleinen Schwingungen, die nur kleine Abweichungen der Glieder des «gestörten» Körperverbandes von seiner Gleichgewichtslage in Betracht zieht. Unter geeigneten Bedingungen führt dies zu Differentialgleichungen, die linear in diesen Abweichungen und deren zeitlichen Ableitungen sind, also leicht gelöst werden können, und die den Bewegungsverlauf in zwar genäherter, aber sehr übersichtlicher Weise wiedergeben. Was den Kiesel betrifft, so kommt es dabei nur auf die Lagenänderung seiner Figurenachse an, nicht auch auf den Drehwinkel des ohnehin symmetrischen Rotors, und dazu genügt schon die Angabe von zwei Koordinaten an Stelle von dreien des allgemeinen Falles.

Die Methode der kleinen Schwingungen ist nur dann erfolgreich anwendbar, wenn die zur Beschreibung der Bewegung eingeführten Koordinaten zweckentsprechend gewählt werden; so versagt zum Beispiel dieser Weg, wenn die Lage der Figurenachse des Kreisels in den bekannten zwei Eulerschen Winkeln  $\vartheta$  und  $\psi$  angegeben wird, wie es die Figur 1 zeigt, und es empfiehlt sich daher, mit anderen, besser dafür geeigneten Winkeln zu rechnen. Ein Versuch mit  $\alpha$  und  $\beta$  an Stelle von  $\vartheta$  und  $\psi$  erweist sich als brauchbar: diese Wahl ermöglicht tatsächlich die sehr bequeme Behandlung des schweren symmetrischen Kreisels mit Hilfe der Methode der kleinen Schwingungen.

Dieses Verfahren ist nun nicht neu, die meisten Darstellungen des angewandten Kreisels bestätigen es. Doch beschränkt man sich dann nur auf den schnellen Kiesel und verwendet demgemäss von vorneherein vereinfachte Formeln. Hier soll hingegen eine anscheinend noch fehlende strenge Herleitung der vollständigen Kieselgleichungen in diesen nicht-Eulerschen Koordinaten gegeben werden, die dann auch für den langsamen Kiesel und den Grenzfall des sphärischen Pendels gültig sind. Darüber hinaus ist es sogar möglich, ohne allzu grosse Umständlichkeiten den Einfluss des Dämpfungswiderstandes, den

<sup>1)</sup> Madras Institute of Technology.

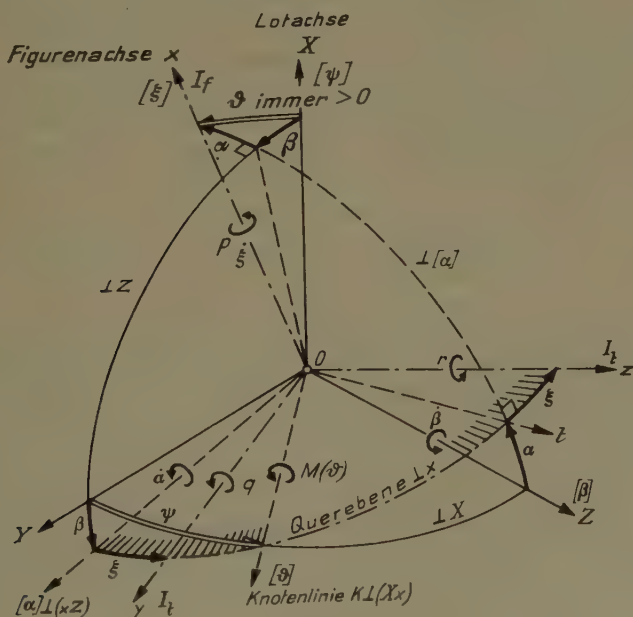


der Kreisel auf seiner Bahn um die Lotachse herum erfährt, auf die Stabilität der Bewegung zu klären.

### Aufstellung der Kreiselgleichungen nach Lagrange

Die Bewegungsgleichungen des schweren symmetrischen Kreisels – gleichgültig, in welchen Koordinaten – werden am einfachsten mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art abgeleitet. Man erspart sich dabei alle Betrachtungen über den Drall und gelangt auf einem verhältnismässig ungefährdeten Weg rasch zum Ziel.

Zunächst muss die Lage des Kreisels im Raum geometrisch festgelegt werden.



Figur 1

Die verwendeten Achsensysteme; alle eingezeichneten Winkel und Drehsinne sind positiv.

Die Figur 1 zeigt das Hauptachsensystem  $x y z$  des Kreisels, der in  $O$  unterstützt ist, und das im Raum ruhende Bezugssystem  $XYZ$ . Beide sind Rechtssysteme, und dementsprechend sind die positiven Drehsinne für die Winkelgeschwindigkeiten  $\dot{\alpha}$  usw. eingezeichnet. Es darf ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit angenommen werden, dass auch die Rotation  $\dot{\varphi}$  des Kreisels immer positiv sei. Die Ausrichtung des kreiselfesten Systems  $x y z$  gegenüber dem raumfesten System  $XYZ$  geschieht durch die drei Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\xi$ .  $\alpha$  ist

der Winkelabstand, den die Figurenachse  $x$  von der  $(XY)$ -Ebene hat; die Drehachse für  $\alpha$  ist durch  $[\alpha]$  angedeutet, was sinngemäss auch für alle übrigen Winkel gilt.  $\beta$  wird in der  $(XY)$ -Ebene gemessen und von der Lotachse  $X$  aus gezählt.  $\alpha$  und  $\beta$  bilden mit dem stets positiven Eulerschen Winkel  $\vartheta$  zusammen ein rechtwinkliges Kugeldreieck. Der dritte Winkel,  $\xi$ , wird in der räumlich beweglichen Querebene gemessen, die senkrecht zur Figurenachse  $x$  des Kreisels steht; und gibt den Weg der Querachse  $y$  von der  $(XY)$ -Ebene an. – Die besprochenen Winkel treten auch noch an anderen Stellen der Figur 1 auf und sind dort eingezeichnet, was zur Verdeutlichung der Darstellung dienen mag. – Mit  $p$ ,  $q$  und  $r$  sind wie üblich die drei rechtwinkligen Drehungskomponenten des Kreisels bezeichnet, und  $M(\vartheta)$  sei der Ausdruck für das Schweremoment, das um die Knotenlinie  $K$  wirkt. Dabei braucht  $M(\vartheta)$  nicht unbedingt von der Schwerkraft herzurühren, es kann ganz beliebigen Ursprungs sein. Mit dieser Verallgemeinerung darf man also auch dann von einem «schweren» Kreisel reden, wenn er in seinem Schwerpunkt unterstützt ist und seine Gleichgewichtslage nicht lotrecht ist, wie es hier in üblicher Weise angenommen sei. –  $I_r$  ist das Trägheitsmoment um die Figurenachse  $x$ , und  $I_t$  ein beliebiges Querträgheitsmoment.

Zur Anwendung der Lagrangeschen Gleichungen ist die bekannte, hier für die Koordinate  $\alpha$  angeschriebene Beziehung

$$F_\alpha = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} \quad (1)$$

für alle Freiheitsgrade der Bewegung, also auch für  $\beta$  und  $\xi$ , auszuwerten. Hierin ist  $F_\alpha$  das auf den Winkel  $\alpha$  bezogene äussere Moment, und  $L$  die gesamte kinetische Energie des sich bewegenden Kreisels.

Es sei zunächst angenommen, dass das äussere Moment nur von der Schwerkraft herrührt. Da diese ein Potential besitzt, lassen sich die Momente  $F_\alpha$ ,  $F_\beta$  und  $F_\xi$  leicht als dessen partielle Ableitungen nach den Koordinaten  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\xi$  bestimmen. Ist  $g$   $m$  das Gewicht des Kreisels und greift es im positiv gerechneten Abstand  $s$  vom Unterstützungspunkt  $O$  an, so erhält man nach der Figur 1 für das Potential  $V$ , wenn es auf das durch  $\vartheta = 0$  gegebene Niveau bezogen wird,

$$V = \mp g m s (1 - \cos \vartheta) .$$

Hiebei – und auch weiterhin – gilt das obere Vorzeichen für den Spielkreisel (Schwerpunkt über dem Unterstützungspunkt) und das untere für den Pendelkreisel (Schwerpunkt unter dem Unterstützungspunkt). Mit  $\cos \vartheta = \cos \alpha \cos \beta$  ergibt sich dann für die linken Seiten der Lagrangeschen Gleichungen (1)

$$F_\alpha = - \frac{\partial V}{\partial \alpha} = \pm g m s \sin \alpha \cos \beta , \quad F_\beta = - \frac{\partial V}{\partial \beta} = \pm g m s \cos \alpha \sin \beta ,$$

$$F_\xi = - \frac{\partial V}{\partial \xi} = 0 .$$

Die kinetische Energie  $L$  des Kreisels wird am einfachsten aus den Trägheitsmomenten und den Drehungskomponenten um die drei Hauptachsen berechnet:

$$L = \frac{I_f}{2} \dot{p}^2 + \frac{I_t}{2} (q^2 + r^2). \quad (2)$$

Dazu müssen vorübergehend die  $p, q, r$  durch  $\alpha, \beta, \xi$  und deren zeitliche Ableitungen  $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\xi}$  ausgedrückt werden:

$$p = -\dot{\beta} \sin \alpha + \dot{\xi}, \quad q = \dot{\alpha} \cos \xi + \dot{\beta} \cos \alpha \sin \xi, \quad r = -\dot{\alpha} \sin \xi + \dot{\beta} \cos \alpha \cos \xi.$$

Nunmehr können die Lagrangeschen Gleichungen entsprechend der Vorschrift (1) zusammengestellt werden:

$$\left. \begin{aligned} I_t \ddot{\alpha} &= \pm g m s \sin \alpha \cos \beta - I_f \dot{p} \dot{\beta} \cos \alpha - I_t \dot{\beta}^2 \sin \alpha \cos \alpha, \\ \text{Trägheitsmoment} & \quad \text{Schweremoment} \quad \text{Kreiselmoment} \quad \text{Zentrifugalmoment} \\ I_t \ddot{\beta} \cos \alpha &= \pm g m s \sin \beta + I_f \dot{p} \dot{\alpha} + 2 I_t \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \alpha, \\ \text{Trägheitsmoment} & \quad \text{Schweremoment} \quad \text{Kreiselmoment} \quad \text{Coriolis-Moment} \\ I_f \dot{p} &= 0 \text{ oder } p = \text{constant} \quad (\text{aber } \dot{\xi} \neq \text{constant!}) \\ \text{oberes Vorzeichen: Spielkreisel; unteres Vorzeichen: Pendelkreisel.} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Damit sind also die strengen Bewegungsgleichungen für den schweren symmetrischen Kreisel in den nicht-Eulerschen Koordinaten der Figur 1 gewonnen; sie lassen sich als Momentengleichungen um die drei zueinander senkrechten Achsen  $[\alpha], t$  und  $x$  deuten. Es mag vielleicht noch erwähnt werden, dass sich der Wirkungssinn der Kreiselmomente nach der Regel vom gleichstimmigen Parallelismus bestimmt, das heisst, dass die Figurenachse  $x$  auf kürzestem Wege zur Achse der Zwangsdrehung  $\dot{\beta}$  bzw.  $\dot{\alpha}$  hin strebt.

Wird nur eine Störung des Kreisels aus seiner Gleichgewichtslage [wofür  $M(\vartheta) = 0$ ] in Betracht gezogen, so genügt es, die nun folgenden Untersuchungen auf kleine Neigungswinkel  $\vartheta$  zu beschränken. Dann sind aber auch die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  klein, und es darf für sie angenähert der Sinus durch den Winkel und der Kosinus durch 1 ersetzt werden. Weiterhin ergibt sich aus den Gleichungen (3), dass das Zentrifugalmoment und das Coriolis-Moment nur von dritter Ordnung klein gegenüber den anderen Gliedern sind, so dass beide Momente vernachlässigt werden können. – Ferner wird noch, um das umständliche  $\pm$  zu vermeiden, statt  $g m s$  der Momentenanstieg  $\partial M / \partial \vartheta$  mit dem Neigungswinkel eingeführt; je nachdem, ob es sich um einen Spiel- oder Pendelkreisel handelt, ist  $\partial M / \partial \vartheta$  positiv oder negativ. – Damit ergibt sich

$$I_t \ddot{\alpha} = \frac{\partial M}{\partial \vartheta} \alpha - I_f \dot{p} \dot{\beta}, \quad I_t \ddot{\beta} = \frac{\partial M}{\partial \vartheta} \beta + I_f \dot{p} \dot{\alpha}, \quad I_f \dot{p} = \text{constant}. \quad (4)$$

Dies sind die für kleine Störungen  $\alpha$  und  $\beta$  gültigen genäherten Differentialgleichungen des schweren symmetrischen Kreisels in den nicht-Eulerschen Koordinaten der Figur 1. Sie sind linear in den beiden Unbekannten  $\alpha$  und  $\beta$  und deren zeitlichen Ableitungen, lassen sich also leicht lösen, wie es ja als Ziel der Anwendung der Methode der kleinen Schwingungen erstrebt wurde.

### Lösung der Kreiselgleichungen mit einer komplexen Veränderlichen

Ehe auf den Kreisel eingegangen wird, soll noch kurz der Sonderfall des sphärischen Pendels gestreift werden. Für dieses ist ja die Rotation  $p = 0$ , und aus den Gleichungen (4) wird einfach

$$I_t \ddot{\alpha} = \frac{\partial M}{\partial \vartheta} \alpha \quad \text{und} \quad I_t \ddot{\beta} = \frac{\partial M}{\partial \vartheta} \beta.$$

Das sind aber zwei gewöhnliche Schwingungsgleichungen, die sich einzeln lösen lassen. Mit  $\partial M / \partial \vartheta < 0$  ergeben sich zwei harmonische Schwingungen mit derselben Pendelfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{-\frac{\partial M / \partial \vartheta}{I_t}} \quad [\text{rad/s}].$$

Bei den hier vorausgesetzten kleinen Ausschlägen kann man nun die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  genau genug wie kartesische Koordinaten in einer Ebene betrachten, die sich senkrecht zur Lotachse  $X$  im Abstand 1 vom Unterstützungspunkt  $O$  befindet (Figur 1). Aus der Zusammensetzung der beiden Pendelschwingungen folgt dann eine stillstehende elliptische Bahn der Pendelspitze (elliptisch-harmonische Bewegung). Das steht aber im Widerspruch zu ihrer wirklichen Bewegung, bei der der Scheitel der etwa elliptischen Bahn ständig langsam vorrückt (in der Literatur oft «Präzession» genannt). Wie sich jedoch zeigen lässt, erfolgt dieses Vorrücken nur verhältnissmäßig dem Quadrat des mittleren Pendelausschlages, so dass es natürlich von einer Näherungsmethode nicht erfasst werden kann, die lediglich kleine Grössen erster Ordnung berücksichtigt. – Soviel über das sphärische Pendel; alle weiteren Betrachtungen gehören nun wieder dem Kreisel mit von Null verschiedener (positiver) Rotation  $p$ .

Es wird versucht, die auch sonst oft bewährte massfreie Darstellung bei der Auswertung der Kreiselgleichungen (4) einzuführen. Dazu wird statt der Zeit  $t$  [s] eine massfreie Zeit  $\tau = t/T$  verwendet, die mit Hilfe der Zeiteinheit

$$T = \frac{I_t}{I_r p} \quad [\text{s}]$$

gebildet wird. Die Ableitungen des Winkels  $\alpha$  nach der Zeit  $t$ , die immer durch darübergestellte Punkte bezeichnet werden, nehmen dann folgende Formen an:

$$\dot{\alpha} = \frac{\alpha'}{T} \quad \text{und} \quad \ddot{\alpha} = \frac{\alpha''}{T^2};$$



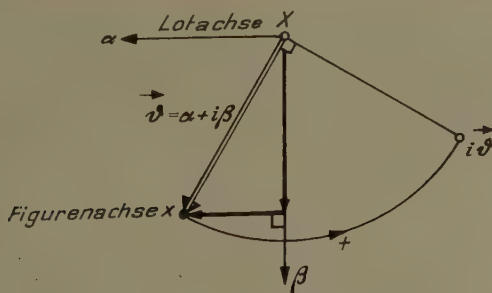
dies gilt ebenso für  $\beta$ , wobei die Striche jetzt die Ableitungen der Winkel nach der massfreien Zeit  $\tau$  bedeuten. – Aus den Gleichungen (4) wird dann

$$\alpha'' + c \alpha + \beta' = 0, \quad \beta'' + c \beta - \alpha' = 0, \quad \text{mit} \quad c = -\frac{I_t}{I_f} \cdot \frac{\partial M / \partial \vartheta}{I_f \dot{\vartheta}^2}. \quad (5)$$

Hierin ist  $c$  der einzige noch verbleibende massfreie Parameter. Neben der baulich festliegenden Grösse  $I_t/I_f$  enthält er im wesentlichen den Momentenanstieg  $\partial M / \partial \vartheta$  im Verhältnis zur (doppelten) kinetischen Energie  $I_f \dot{\vartheta}^2$  der Drehung um die Figurenachse, die ja den Hauptanteil der gesamten kinetischen Energie des Kreisels ausmacht [Formel (2)]. Das Vorzeichen von  $c$  ist dabei so gewählt, dass es positiv ausfällt, wenn das Schweremoment rückführend ist ( $\partial M / \partial \vartheta < 0$ , Pendelkreisel), und negativ, wenn es umkippend wirkt ( $\partial M / \partial \vartheta > 0$ , Spielkreisel). Ist das Schweremoment nur gering im Vergleich zur kinetischen Energie des Kreisels, so wird er schnell (oder stark) genannt, und  $c$  ist dann seinem absoluten Betrag nach klein; andernfalls handelt es sich um einen langsamen (oder schwachen) Kreisel, wobei es wiederum nicht im einzelnen darauf ankommt, wie gross das Moment oder die Rotation ist. – Die Grösse  $c$  charakterisiert also ihrem Betrag und Vorzeichen nach sehr gut die Belastung des schweren symmetrischen Kreisels und wird deshalb als relatives Schweremoment bezeichnet.

Die Glieder  $c \alpha$  und  $c \beta$  nehmen in den Kreiselgleichungen (5) die Plätze ein, wo auch sonst bei Schwingungsgleichungen die Fesselung an eine Gleichgewichtslage zum Ausdruck gebracht wird, während die ebenfalls massfreien Kreismomente  $+\beta'$  und  $-\alpha'$  in der charakteristischen Anordnung gyroskopischer Terme auftreten; dies aber weist auf die Möglichkeit hin, die beiden (kartesischen) Koordinaten  $\alpha$  und  $\beta$  komplex zusammenzufassen, und davon soll nun hier Gebrauch gemacht werden.

Blickt man in der Figur 1 gegen die Lotachse  $X$  zum Unterstützungspunkt  $O$  hin, und sieht man das kleine Kugeldreieck  $\alpha \beta \vartheta$  genau genug als eben an, so bietet sich etwa folgendes Bild:



Figur 2  
Die komplexe Veränderliche  $\vec{\vartheta}$ .

Die Lage der Figurenachse  $x$  wird jetzt statt durch  $\alpha$  und  $\beta$  nur durch die einzige komplexe Koordinate  $\vec{\vartheta} = \alpha + i\beta$  dargestellt, die man ebensogut als einen Vektor auffassen kann. Um die komplexe Zusammenfassung selbst durchzuführen, wird die zweite der Gleichungen (5) mit  $i$  multipliziert und zur ersten hinzugezählt; man erhält dann

$$\vec{\vartheta}'' + c\vec{\vartheta} - i\vec{\vartheta}' = 0 \quad \text{mit} \quad \vec{\vartheta}' = \frac{\partial \vec{\vartheta}}{\partial \tau} \quad \text{und} \quad \vec{\vartheta}'' = \frac{d^2 \vec{\vartheta}}{d\tau^2}. \quad (6)$$

Wird zur Lösung von (6) für die Unbekannte  $\vec{\vartheta}$  der Ansatz  $\vec{\vartheta} = C \exp z\tau$  eingeführt, so ergibt sich zunächst die charakteristische Gleichung

$$z^2 + c - iz = 0,$$

und daraus folgen schliesslich die beiden Wurzeln

$$z_{1,2} = \frac{i}{2} \pm i\sqrt{\frac{1}{4} + c}. \quad (7)$$

Solange  $c \geq -1/4$  bleibt, bedeuten diese beiden rein imaginären Werte von  $z$  zwei ungedämpfte Schwingungen, die nichts anderes sein können als die Nutation und die Präzession. Werden ihre massfreien Frequenzen mit  $N$  und  $\Omega$  bezeichnet, das heisst  $z_1 = iN$  und  $z_2 = i\Omega$  gesetzt, so ergibt sich zu ihrer Bestimmung die Frequenzformel

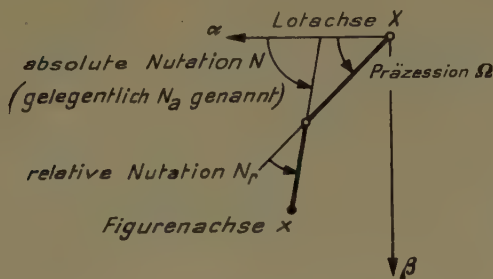
$$N, \Omega = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + c}; \quad c \geq -\frac{1}{4}. \quad (8)$$

Die auf die Sekunde bezogene Winkelgeschwindigkeit der Nutation  $\nu$  [rad/s] und der Präzession  $\omega$  [rad/s] berechnet sich einfach nach Teilung durch die Zeiteinheit  $T = I_t/(I_f p)$  zu

$$\nu, \omega = \frac{N, \Omega}{T} = \frac{I_f}{I_t} p \left( \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + c} \right); \quad c \geq -\frac{1}{4}. \quad (9)$$

Die Form  $\vec{\vartheta} = C_1 \exp i\Omega\tau + C_2 \exp iN\tau$  ( $C_1, C_2$  komplex) ist jetzt der unmittelbare Ausdruck für die beiden kreisförmigen Teilbewegungen der Figurenachse  $x$ , die nun nicht mehr aus je zwei Teilschwingungen der  $\alpha$ - und  $\beta$ -Koordinate zusammengesetzt zu werden brauchen. Die Figur 3 mag zur geometrischen Veranschaulichung dienen:

Die Präzession kann man sich durch die Drehbewegung eines starren Armes um die Lotachse  $X$  erzeugt denken, während die Nutation aus einer ihr überlagerten Drehbewegung eines zweiten Armes besteht. Es ist übrigens dabei auseinanderzuhalten, ob die Nutation vom Präzessionsarm aus gezählt wird, wie meist in der Kreissliteratur (relative Nutation  $N_r$ ), oder von einer räumlich festen Anfangslage aus, wie im vorliegenden Bericht (absolute Nutation  $N$ , oder



Figur 3  
Präzession und Nutation.

auch  $N_a$  zur gelegentlichen besseren Unterscheidung). – Es gilt augenscheinlich

$$N_a = \Omega + N_r \quad [\text{massfrei}] \quad \text{und entsprechend} \quad v_a = \omega + v_r \quad [\text{rad/s}], \quad (10)$$

was beim Vergleich mit anderweitig gefundenen Ergebnissen wohl zu beachten ist.

Der Inhalt der Formeln (8) und (10) kann sehr übersichtlich in einem Diagramm dargestellt werden:

Für kleines  $|c|$  (schneller Kiesel) ist genähert

$$N_a = 1 + c; \quad \Omega = -c; \quad N_r = 1 + 2c. \quad (11)$$

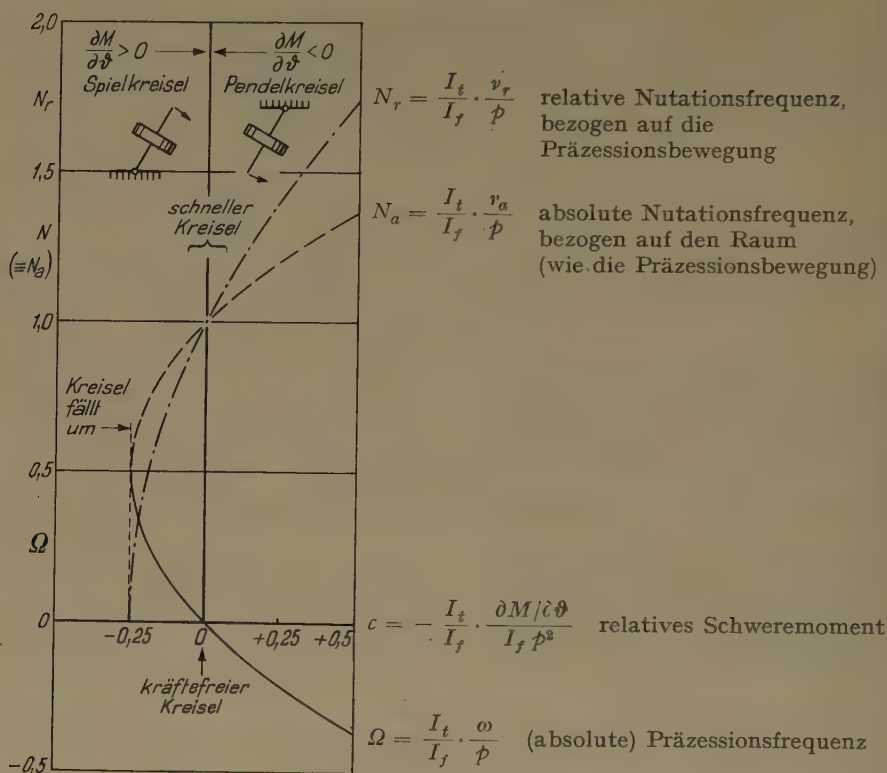
Die Anzahl  $n$  der Nutationen, die auf einen Präzessionsumlauf entfallen, ergibt sich dann für einen schnellen Kiesel angenähert zu

$$n = \frac{|N|}{|\Omega|} = \frac{1}{|c|}.$$

In der Literatur wird  $n$  zuweilen als Mass für die Schnelligkeit des Kreisels benutzt; dieser Hinweis mag den Zusammenhang mit dem hier eingeführten  $c$  geben.

Wie die Figur 4 zeigt, ist die Nutation  $N$  immer positiv, das heisst, ihr Drehsinn ist derselbe wie der der Rotation  $\phi$  des Kreisels. Anders bei der Präzession  $\Omega$ : je nachdem, ob es sich um einen Spiel- oder Pendelkiesel handelt, läuft sie mit oder entgegen  $\phi$ .

Wenn ein Spielkiesel allmählich ausläuft, so gibt es für seine Langsamkeit eine bemerkenswerte Grenze, nämlich bei  $c = -1/4$ : dort verschwindet die ursprünglich schnelle relative Nutation vollständig, und es bleibt nur noch eine viel rascher gewordene glatte Präzessionsbewegung übrig, mit der die Figurenachse die Lotachse umkreist. Bei weiterhin verzögerter Rotation  $\phi$  ist das allerdings nur ein vorübergehender Zustand; denn für  $c < -1/4$  erhält nach dem Ausdruck (7) die Wurzel  $z_2$  einen positiven reellen Anteil, und das bedeutet



Figur 4  
Frequenzdiagramm.

ein ständiges Anwachsen des Neigungswinkels  $\vartheta$ . Der Spielkreis fällt also dann um, er hat die Stabilitätsgrenze bei

$$\frac{\partial M}{\partial \vartheta} = g m s = \frac{I_f}{I_t} \cdot \frac{I_f p^2}{4}$$

überschritten.

Beim Pendelkreis kann die Rotation ohne weiteres bis zum Stillstand verlangsamt werden. Im Grenzfall  $p = 0$ , also  $c \rightarrow \infty$  (sphärisches Pendel), wird das Verhältnis  $v_a/\omega = N_a/\Omega = -1$ . Die beiden Arme der Figur 3 drehen sich dann mit gleicher absoluter Winkelgeschwindigkeit, aber entgegengesetztem Drehsinn umeinander, und die entstehende Bahn der Figurenachse  $x$  um die Lotachse  $X$  wird eine genaue Ellipse (bekannte Konstruktion!). Das ist die bereits auf anderem Wege gefundene Bewegung des sphärischen Pendels.

Der folgende Hinweis mag vielleicht noch bemerkenswert sein:



Aus der Frequenzformel (8) ergibt sich, wenn der Deutlichkeit halber  $N_a$  an Stelle von  $N$  geschrieben wird,

$$N_a \Omega = \frac{1}{4} - \left( \frac{1}{4} + c \right) = -c$$

oder

$$T \nu_a T \omega = T^2 \frac{\partial M / \partial \vartheta}{I_t} = T^2 \left( s g n \frac{\partial M}{\partial \vartheta} \right) \underbrace{\frac{|\partial M / \partial \vartheta|}{I_t}}_{\omega_0^2}$$

woraus folgt

$$\nu_a \omega = \left( s g n \frac{\partial M}{\partial \vartheta} \right) \omega_0^2; \quad |\nu_a| > |\omega_0| > |\omega|. \quad (12)$$

Das bedeutet erstens, dass die Nutation  $\nu_a$  und die Präzession  $\omega$  beim Spielkreisel ( $\partial M / \partial \vartheta > 0$ ) immer gleichen Drehsinn und beim Pendelkreisel ( $\partial M / \partial \vartheta < 0$ ) immer entgegengesetzten Drehsinn haben; zweitens, dass die Präzession  $\omega$  immer langsamer ist als die Eigenfrequenz  $\omega_0$  des Kreisels, wenn man ihn ohne Rotation ( $\dot{\varphi} = 0$ ) als gewöhnliches ebenes oder sphärisches Pendel schwingen lässt. Darüber hinaus zeigt diese Beziehung aber auch noch einen überraschend einfachen zahlenmässigen Zusammenhang zwischen diesen Grössen: für ein und denselben schweren Kiesel gilt demnach ganz unabhängig von seiner jeweiligen Rotation  $\dot{\varphi}$ , dass das Produkt aus (absoluter) Nutationsfrequenz  $\nu_a$  und Präzessionsfrequenz  $\omega$  immer gleichbleibend ist. Hat man also irgendwie das  $\omega$  ermittelt, sei es auch aus den Kreiselmomenten in Eulerschen Koordinaten, so folgt daraus sofort das zugehörige  $\nu_a$  und braucht nicht erst durch eine gesonderte Berechnung bestimmt zu werden.

Weiter folgt aus derselben Formel

$$N_a + \Omega = 1,$$

was in gleicher Weise auf

$$\nu_a + \omega = \frac{I_f}{I_t} \dot{\varphi} \quad (13)$$

führt. Diese Beziehung ist – im Gegensatz zur vorigen – frei vom Schwere-moment  $M(\vartheta)$ ; sie besagt, dass die algebraische (!) Summe von (absoluter) Nutationsfrequenz  $\nu_a$  und Präzessionsfrequenz  $\omega$  unabhängig von  $M(\vartheta)$  immer gleichbleibend ist, solange sich die Rotation  $\dot{\varphi}$  nicht ändert.

Gelegentlich ist der Rotor eines Kieselgerätes nicht von einem Gehäuse umschlossen, so dass er in freier Berührung mit der als ruhend angenommenen Luft bleibt. In solchen und ähnlichen Fällen entsteht bei seiner Präzessions- und Nutationsbewegung ein Moment aerodynamischer Natur, der Magnus-Effekt. Dieser äussert sich darin, dass die Figurenachse eine seitliche Ablenkung auf ihrer Bahn relativ zur umgebenden Luft erfährt, und zwar in genau demselben Sinn wie unter der Einwirkung des Kreiselmomentes. Der Magnus-Effekt kommt also einer scheinbar erhöhten Rotation  $\dot{\varphi}$  des Kreisels gleich.

## Der schwere symmetrische Kreisel mit Dämpfungswiderstand

Es soll nur der einfache Fall behandelt werden, dass der Kreisel wohl auf seiner Bahn um die Lotachse herum einen Bewegungswiderstand erfährt, nicht aber, dass seine Rotation abgebremst wird. Die dritte der Bewegungsgleichungen (4), die sich auf die Figurenachse bezieht, bleibt daher ungeändert, und nur die ersten beiden müssen durch die Einführung eines Dämpfungsmomentes vervollständigt werden. Dieses wird – wie üblich – verhältnissmäßig der Bewegungsgeschwindigkeit der Figurenachse angenommen, so dass seine Komponenten in der  $\alpha$ - und  $\beta$ -Richtung (Figur 2) in der Form

$$\frac{\partial M}{\partial \dot{\vartheta}} \dot{\alpha} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial M}{\partial \dot{\vartheta}} \dot{\beta}$$

angesetzt werden können; darin ist  $\partial M / \partial \dot{\vartheta}$  ein konstanter, negativer Wert.

Damit lauten dann die ersten beiden Lagrangeschen Gleichungen (4)

$$I_t \ddot{\alpha} = \frac{\partial M}{\partial \vartheta} \alpha + \frac{\partial M}{\partial \dot{\vartheta}} \dot{\alpha} - I_f \dot{\varphi} \dot{\beta}, \quad I_t \ddot{\beta} = \frac{\partial M}{\partial \vartheta} \beta + \frac{\partial M}{\partial \dot{\vartheta}} \dot{\beta} + I_f \dot{\varphi} \dot{\alpha}. \quad (14)$$

Wird wiederum die bequemere massfreie Darstellung benutzt, so ändert sich gegenüber den Gleichungen (5) nichts, als dass noch ein Glied mit  $\alpha'$  bzw.  $\beta'$  hinzukommt, das mit dem Faktor

$$-\frac{T}{I_t} \cdot \frac{\partial M}{\partial \dot{\vartheta}} = -\frac{\partial M / \partial \dot{\vartheta}}{I_f \dot{\varphi}} = a > 0 \quad (15)$$

multipliziert ist. Dieser immer positive Ausdruck  $a$  kann als ein Mass für das relative Dämpfungsmoment angesehen werden und sei kurz mit Dämpfung bezeichnet. – Damit erhalten die Gleichungen (14) des gedämpften schweren Kreisels für kleine Neigungswinkel  $\vartheta$  die genäherte, massfreie Gestalt

$$\alpha'' + a \alpha' + c \alpha + \beta' = 0, \quad \beta'' + a \beta' + c \beta - \alpha' = 0. \quad (16)$$

Obwohl eine sofortige Lösung dieser simultanen, linearen Differentialgleichungen ohne weiteres möglich wäre, soll auch hier vor der weiteren Behandlung deren vorteilhafte Zusammenfassung unter Verwendung der einzigen komplexen Veränderlichen  $\vec{\vartheta} = \alpha + i \beta$  vorgenommen werden; die Bewegung der Figurenachse  $x$  erscheint dann in der vektorischen Form

$$\vec{\vartheta}'' + a \vec{\vartheta}' + c \vec{\vartheta} - i \vec{\vartheta}' = 0. \quad (17)$$

Wird jetzt der übliche Lösungsansatz  $\vec{\vartheta} = C \exp z \tau$  eingeführt, so ergibt sich die komplexe charakteristische Gleichung

$$z^2 + a z + c - i z = 0 \quad (18)$$

mit den zwei Wurzeln

$$z_{1,2} = \left( -\frac{a}{2} + \frac{i}{2} \right) \pm \sqrt{\left( -\frac{a}{2} + \frac{i}{2} \right)^2 - c}. \quad (19)$$



Werten  $a = 0,2$  und  $c = -0,2$ , also für

$$z_{1,2} = \left(-0,1 + \frac{i}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-0,1 + \frac{i}{2}\right)^2 + 0,2}.$$

Zunächst wird die Zahl  $[-0,1 + (i/2)]$  eingetragen und zur Konstruktion von  $\sqrt{[-0,1 + (i/2)]^2 + 0,2}$  quadriert (verdoppeltes Argument, was durch die stark eingezeichneten gleich grossen Drehwinkel um  $O$  angedeutet ist, und auf das Quadrat gestreckter Betrag); dann wird noch  $+0,2$  hinzugezählt und aus dem so erhaltenen Ausdruck die Wurzel gezogen (im umgekehrten Sinn wie das Quadrieren). Das Zwischenergebnis  $\sqrt{[-0,1 + (i/2)]^2 + 0,2}$  wird schliesslich zur Zahl  $[-0,1 + (i/2)]$  geometrisch addiert und von ihr subtrahiert, womit die beiden Wurzeln  $z_1$  und  $z_2$  gefunden sind (es ist  $z = -0,28_4 + 0,77_1 i$  und  $z_2 = +0,08_4 + 0,22_9 i$ ).

Zur Probe kann noch die geometrische Addition von  $z_1$  und  $z_2$  ausgeführt werden, die ja den Wert  $(-a + i)$  haben soll, und ferner die Multiplikation  $z_1 z_2$ , die gerade  $c$  ergeben soll. Dies letztere erfordert, dass das Produkt der beiden absoluten Beträge  $|z_1| |z_2|$  gleich  $|c|$  ist und dass die Summe der Argumente von  $z_1$  und  $z_2$  genau 2 Rechte (für  $c < 0$ ) bzw. 4 Rechte (für  $c > 0$ ) beträgt. Aus dieser Bedingung ist übrigens sofort zu schliessen, dass für einen Spielkreisel ( $c < 0$ ) unmöglich beide Wurzeln in der linken Halbebene liegen können, so wie es zum Beispiel aus der Figur 5 für die Präzession mit ihrem positiven Realteil ersichtlich ist. – Eine in der rechten Halbebene liegende Wurzel bedeutet aber eine Entdämpfung der Kreiselbewegung. Danach wäre also der Spielkreisel mit Dämpfungswiderstand instabil, und das ist ganz offenbar im Widerspruch zu der alltäglichen Erfahrung, die ja gerade im Gegenteil eine ausgesprochene Stabilität der aufrechten Lage zeigt. Nun, diese Erscheinung des Aufrichtens wird durch eine ganz andere, hier nicht berücksichtigte Ursache hervorgerufen, nämlich durch die Reibung der Kreiselspitze auf ihrer Unterlage. Überwiegt dieser Einfluss, so kann tatsächlich die meist nur schwache instabilisierende Wirkung der Wurzel  $z_2$  dem Spielkreisel nichts anhaben: er bleibt aufrecht.

Beim Pendelkreisel mit  $c > 0$  liegen hingegen beide Wurzeln  $z_1$  und  $z_2$  immer in der linken Halbebene, wie auch später noch gezeigt werden wird. Jedenfalls aber müssen sie so angeordnet sein, dass die Verbindungslinien  $O z_1$  und  $O z_2$  spiegelbildlich zur reellen Achse sind; denn nur dann kann die Summe der Argumente von  $z_1$  und  $z_2$  4 Rechte betragen. Es gilt daher einfach aus geometrischen Gründen für die Realteile ( $\mathcal{R}$ ) und Imaginärteile ( $\mathcal{I}$ ) der beiden Wurzeln

$$\frac{|\mathcal{R}(z_1)|}{|\mathcal{I}(z_1)|} = \frac{|\mathcal{R}(z_2)|}{|\mathcal{I}(z_2)|}. \quad (20)$$

Wie die Figur 5 zeigt, besteht dieselbe Beziehung auch für den Spielkreisel, und zwar weil die Verbindungslinien  $O z_1$  und  $O z_2$  jetzt wegen  $c < 0$  spiegel-



bildlich zur imaginären Achse liegen müssen. Die Anteile  $\mathcal{I}$  bedeuten aber nichts anderes als die (massfreien) Frequenzen von Nutation und Präzession, und die Anteile  $\mathcal{R}$  sind deren Dämpfungen (bzw. Entdämpfung bei der Präzession des Spielkreisels). Die Beziehung (20) sagt also aus, dass die meist wesentlich schnellere Nutation viel stärker gedämpft ist als die Präzession, was man ja bei jedem Kreiselversuch deutlich genug beobachten kann. Ist der Kreisel jedoch langsam, so behauptet sich aus eben demselben Grunde auch die Nutation längere Zeit neben der Präzession, und im Grenzfall des sphärischen Pendels sind diese beiden Teilbewegungen auch hinsichtlich des Abklingens vollkommen gleichwertig.

Handelt es sich um einen schnellen Kreisel (kleines  $c$ ), so zeigt die Konstruktion der Figur 5 oder auch die Formel (19), dass sich  $z_2$  auf den Ursprung  $O$  zurückzieht. Bei der geometrischen Addition von  $z_1$  und  $z_2$  überwiegt dann  $z_1$  bei weitem das wesentlich kleinere  $z_2$ , und es gilt daher in erster Annäherung

$$z_1^I = (-a + i) \, .$$

Wegen  $z_2 = c/z_1$  ergibt sich aber daraus auch eine Näherung

$$z_2^I = \frac{c}{z_1^I} = \frac{c}{(-a + i)} \, .$$

Mit diesem Wert kann nun  $z_1^I$  verbessert werden:

$$z_1^{II} = (-a + i) - z_2^I \, ,$$

woraus wiederum ein noch genaueres  $z_2^{II} = c/z_1^{II}$  folgt, und so weiter, bis mit Hilfe dieses gut konvergierenden Iterationsverfahrens die gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

Im übrigen zeigt sich für wirkliche Kreisel mit gewöhnlich nur kleinem Dämpfungswiderstand, dass die beiden Wurzeln  $z_1$  und  $z_2$  sehr nahe der imaginären Achse liegen. Dann ergibt sich aber die Möglichkeit, das Problem des schwach gedämpften Kreisels genähert zu lösen, und das soll im nächsten Abschnitt versucht werden.

**Eine Näherungslösung für kleinen Dämpfungswiderstand**

Die ungedämpfte Kreiselbewegung wird durch zwei rein imaginäre Wurzeln  $z_1$  und  $z_2$  beschrieben, die – wie im vorigen Abschnitt ausgeführt – beim Hinzutreten einer Dämpfung  $a$  komplex werden [Formel (19)], also einen reellen Anteil erhalten. Ist die Dämpfung  $a$  nur klein, so wird auch dieser Zuwachs nur klein sein, und die komplexen Wurzeln lassen sich dann bei Beschränkung auf das erste Taylor-Glied durch

$$(z)_a = (z)_{a=0} + \left( \frac{dz}{da} \right)_{a=0} a$$

ausdrücken. Hierin werden die Wurzeln  $z$  als Funktionen der Dämpfung  $a$  angesehen, und  $(dz/da)_{a=0}$  bedeutet den (im allgemeinen komplexen) Differentialquotienten an der Stelle  $a = 0$ , die ja der Ausgangspunkt zur Gewinnung der Näherungslösung für kleinen Dämpfungswiderstand ist. – Wird zur Ermittlung von  $dz/da$  die komplexe charakteristische Gleichung (18) nach  $a$  abgeleitet, so erhält man zunächst

$$2z \frac{dz}{da} + z + a \frac{dz}{da} - i \frac{dz}{da} = 0$$

und daraus

$$\frac{dz}{da} = \frac{-z}{2z + a - i}$$

An der Stelle  $a = 0$  sind die beiden Werte  $z$  durch die Formel (7) oder auch (19) gegeben, und dies eingesetzt führt auf die fraglichen Differentialquotienten

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{dz_1}{da}\right)_{a=0} &= \frac{-\frac{i}{2} - i\sqrt{\frac{1}{4} + c}}{i + 2i\sqrt{\frac{1}{4} + c} - i} = -\frac{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + c}}{2\sqrt{\frac{1}{4} + c}}, \\ \left(\frac{dz_2}{da}\right)_{a=0} &= \frac{-\frac{i}{2} + i\sqrt{\frac{1}{4} + c}}{i - 2i\sqrt{\frac{1}{4} + c} - i} = +\frac{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + c}}{2\sqrt{\frac{1}{4} + c}}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Man bemerkt zunächst eine erfreulich einfache Form dieser beiden Ausdrücke. Weiterhin fällt auf, dass sie rein reell sind, so dass ein kleiner Zuwachs  $(dz/da)_{a=0} a$  senkrecht zur imaginären Achse steht (Figur 5). Das besagt aber, dass die imaginären Anteile der Wurzeln  $z_1$  und  $z_2$  dieselben bleiben, oder mit andern Worten, dass die dadurch bestimmten Frequenzen  $N$  und  $\Omega$  in erster Näherung von einer kleinen Dämpfung  $a$  unabhängig sind. Diese in der Schwingungslehre sehr allgemeine Tatsache gilt also auch hier und trägt wesentlich zur Vereinfachung der Lösung bei. Für die Frequenzen von Nutation und Präzession gilt daher bei ungedämpfter sowie bei schwach gedämpfter Bewegung gleicherweise die Frequenzformel (8). Diese lässt sich übrigens noch benutzen, um die Differentialquotienten (21) zu vereinfachen; es ergibt sich in leicht ersichtlicher Weise

$$\left(\frac{dz_1}{da}\right)_{a=0} = -\frac{N}{N - \Omega} \quad \text{und} \quad \left(\frac{dz_2}{da}\right)_{a=0} = +\frac{\Omega}{N - \Omega},$$

worin auch für  $N - \Omega$  nach der Gleichung (10)  $N_r$  geschrieben werden kann.

Damit werden nun die reellen Anteile der beiden komplexen Wurzeln  $(z_1)_u$  und  $(z_2)_a$  bei kleiner Dämpfung  $a$

$$-\frac{N}{N - \Omega} a \quad \text{bzw.} \quad +\frac{\Omega}{N - \Omega} a$$

mit  $N > 0, N - \Omega = N_r > 0, \Omega \leq 0$ .

Es zeigt sich wiederum, dass der letztere Anteil für  $\Omega > 0$ , also für die Präzession des gedämpften Spielkreisel, positiv ausfällt, die Bewegung der Figurenachse somit instabil ist. – Zusammengefasst lauten dann endlich die genäherten Wurzeln  $z_1$  und  $z_2$  der schwach gedämpften Kreiselbewegung

$$z_1 = -\frac{N}{N - \Omega} a + i N \text{ (Nutation)}, \quad z_2 = +\frac{\Omega}{N - \Omega} a + i \Omega \text{ (Präzession)}. \quad (22)$$

Man findet hier übrigens die Beziehung (20) wieder: das Verhältnis des reellen Anteils zum imaginären ist für beide Schwingungen dasselbe, und zwar  $a/(N - \Omega)$  (wenn vom Vorzeichen abgesehen wird).

So überraschend einfach die Formeln (22) auch sind, man sieht ihnen nicht ohne weiteres an, mit welcher Genauigkeit sie das Ergebnis liefern. Insbesondere wird man im Zweifel darüber sein, bis zu welchem Wert der Dämpfung  $a$  man nur gehen darf, um nicht eine zu grosse Unsicherheit dieser Näherungen in Kauf nehmen zu müssen. Eine Fehlerabschätzung ist also sehr erwünscht; sie kann so geschehen, dass die Summe und das Produkt der beiden Wurzeln gebildet und mit den Sollwerten verglichen werden, welche wegen (18) gleich  $-a + i$  bzw.  $c$  sind:

Die Summe ergibt

$$z_1 + z_2 = \frac{-N + \Omega}{N - \Omega} a + i \underbrace{(N + \Omega)}_1 = -a + i,$$

genau wie es sein soll, und das Produkt ergibt

$$z_1 z_2 = \underbrace{-N\Omega}_c \left( \frac{a}{N - \Omega} \right)^2 - \underbrace{N\Omega}_c = c \left[ 1 + \left( \frac{a}{N - \Omega} \right)^2 \right].$$

Hier kommt statt  $c$  ein grösserer Wert heraus; der dabei begangene relative Fehler ist

$$\left( \frac{a}{N - \Omega} \right)^2 = \frac{a^2}{1 + 4c} = \frac{(\partial M / \partial \dot{\theta})^2}{(I_f \dot{p})^2 - 4 I_t (\partial M / \partial \dot{\theta})}. \quad (23)$$

Dieser Ausdruck gibt zwar nicht im einzelnen darüber Aufschluss, wie sich der Fehler auf die beiden Wurzeln verteilt, doch gibt er jedenfalls einen guten Anhalt zur Beurteilung des Ergebnisses. So wäre es zum Beispiel nicht ratsam, sich blindlings auf ein genähertes Ergebnis zu verlassen, das mit den Werten  $a = 0,2$  und  $c = -0,2$  erhalten wird (zeichnerisches Beispiel der Figur 5); denn jetzt wäre schon das Kriterium (23)

$$\frac{a^2}{1 + 4c} = \frac{0,04}{1 - 0,8} = 20\%$$

eine deutliche Warnung zur Vorsicht. Es wäre dann unerlässlich, eine Probe anzustellen und gegebenenfalls eine Verbesserung vorzunehmen, wenn man nicht gleich von Anfang an die bequemere zeichnerische Lösung vorziehen sollte.

### Summary

The gyroscope has many technical applications as an essential member in a system with several degrees of freedom, the (dynamic) stability of which with respect to a certain equilibrium position may be of particular interest. To investigate the stability of a system by the well-known method of small oscillations, the movements of the different members must be described by convenient coordinates. As to the gyroscope, it is necessary for this purpose to replace EULER's angles by other coordinates, with which the rigorous equations of its movement are deduced. Assuming only small displacements of the axis of symmetry from its undisturbed equilibrium position, and by making the problem dimensionless, a simple solution can be obtained for the nutation and precession of a heavy gyroscope both as a symmetrical top and as a gyroscopic pendulum. Further, the damping of the gyroscope by its movement around the equilibrium position has also been considered in order to be able to estimate its influence on the stability.

(Eingegangen: 25. Mai 1954.)

---

## Kurze Mitteilungen – Brief Reports – Communications brèves

---

### Über den Mechanismus einiger Elektrete

Von KARL ANTENEN, Zürich<sup>1)</sup>

#### I. Einleitung

Die Bezeichnung «Elektret» für ein «permanent» polarisiertes Dielektrikum geht auf EGUCHI zurück. Er polarisierte Scheiben von Karnaubawachs in elektrischen Feldern von 1000 bis 10000 V/cm bei höherer Temperatur und fand, dass im ersten Falle nach Abschalten des Feldes bei Zimmertemperatur und Kurzschluss der Elektroden die der Anode gegenüberliegende Dielektrikumoberfläche negative, die der Kathode anliegende Oberfläche positive Ladung zeigte. Bei mittleren Feldern von 10000 V/cm und mehr war der Sachverhalt während weniger Tage derselbe, doch kehrte sich das Vorzeichen der scheinbaren Oberflächenladung später um. Die erste Ladungsart nennt man Hetero-, die zweite Homocharge.

Es wurden Elektrete aus den verschiedensten Substanzen hergestellt, wobei das Schergewicht dauernd auf polare Substanzen gelegt wurde (Wachse, Harze, Polyvinylchlorid, Plexiglas usw.). Dies präjudiziert eine unserer Auffassung nach unfruchtbare Dipoltheorie.

<sup>1)</sup> Institut für technische Physik der ETH.



EWING<sup>1)</sup> berichtet über Röntgenaufnahmen von Karnaubawachs-Elektreten; die orientierte Dipole zeigen sollen. Über Raumladungen in Wachsen berichten THIESSEN, WINKEL und HERRMANN sowie JÄGER.

GROSS<sup>2)</sup> stellte Experimente über das Zustandekommen der Homocharge an und erklärte sie als Luftionen, die durch elektrischen Durchschlag auf die Dielektrikumoberfläche gelangen. Die diesbezüglichen Experimente sind so überzeugend, dass in bezug auf die Herkunft der Homocharge kaum ein Zweifel möglich ist.

### *Erklärungsmöglichkeiten für die Heterocharge*

Piezo- und pyroelektrische Erscheinungen, wie sie GEMANT<sup>3)</sup> in Betracht zog, um die Ladungsumkehr erklären zu können, wollen wir ausser acht lassen, da bisher an Wachsen, Harzen usw. keiner dieser Effekte mit Sicherheit nachgewiesen werden konnte.

Damit gibt es für die Heterocharge grundsätzlich noch drei mögliche Mechanismen, die einzeln oder in Verbindung miteinander den Effekt hervorbringen könnten:

a) *Dipolorientierung*. Man könnte sich vorstellen, dass sehr lange Dipole, wie organische Moleküle sie vielleicht hervorbringen, in kurzgeschlossenem Zustande hohe Relaxationszeiten aufweisen. Oder man könnte an Dipolgruppen denken, die in kurzgeschlossenem Zustande aus energetischen Gründen orientiert bleiben. «Elektrete» in diesem Sinne könnten zum Beispiel aus Bariumtitanat hergestellt werden.

b) *Grenzflächenpolarisation* (J. C. MAXWELL). Unstetigkeitsflächen im Dielektrikum bauen wegen Leitfähigkeitsunterschieden Flächenladungen (das heisst sehr dünne Raumladungsschichten) auf. Diese erzeugen ein «Dipolmoment». Namentlich zwei wichtige Grenzflächen sind immer vorhanden: jene zwischen Elektroden und Dielektrikum.

c) *Ionenwanderung über makroskopische Distanzen*. Dadurch könnten an den Elektroden Raumladungsschichten entstehen, die einen makroskopischen Dipol erzeugen würden. Es wurde jedoch mehrfach die Vermutung geäußert, dass damit die «Permanenz» der Ladung infolge der endlichen Leitfähigkeit des Dielektrikums nicht erklärt werden könne (zum Beispiel Gross). Es wurde aber offenbar ausser acht gelassen, dass auch hier die auftretende Relaxationszeit durchaus nicht  $(\epsilon \epsilon_0)/\sigma$  zu sein braucht, wobei  $\sigma$  etwa die mit Wechselspannung gemessene Leitfähigkeit bedeuten kann.

Es wurde in der vorliegenden Arbeit versucht, Klarheit zu schaffen über das Zustandekommen der Heterocharge.

## II. Potentiale

Wichtige Aufschlüsse kann der Potentialverlauf im Innern des Dielektrikums ergeben. Es wurden deshalb scheibenförmige Proben aus filtriertem Karnaubawachs hergestellt mit einem Durchmesser von 75 mm und einer Dicke von 12 mm. Die parallelen Flächen wurden mit Silber bedampft und längs des Umfangs Sonden eingeschmolzen.

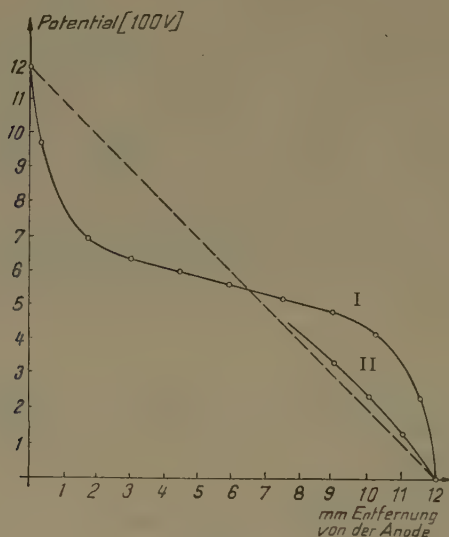
<sup>1)</sup> M. EWING, *An X-ray Study of the Structure on Electrets*, Phys. Rev. 36, 378 (1930).

<sup>2)</sup> B. GROSS, *On Permanent Charges in Solid Dielectrics I*, Phys. Rev. 67, 253 (1945). – *On Permanent Charges in Solid Dielectrics II*, J. chem. Phys. 17, 866 (1949).

<sup>3)</sup> A. GEMANT, *Recent Investigations on Electrets*, Phil. Mag. 20, 929 (1935).

An die versilberten Oberflächen wurde eine Spannung von 1200 V gelegt, worauf mit einer Kompensationsschaltung die Potentialdifferenzen zwischen Sonde und Elektrode oder Sonde und Sonde gemessen wurden. Auf diese Weise wurde der Potentialverlauf bei 70°C, 50°C und 35°C festgestellt. Es zeigte sich folgendes:

Die Feldstärke am Rande nimmt mit der Zeit zu. Es gibt ein ausgedehntes Mittelstück, in dem die Feldstärke zeitlich abnimmt, räumlich aber konstant bleibt, das heisst in dem keine Raumladungen auftreten. Bei 70°C beträgt die



Figur 1

Potentialverteilung in Karnauba bei verschiedener Leitfähigkeit:

I:  $\sigma_{stat} = 8 \cdot 10^{-14} \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$ ; II:  $\sigma_{stat} = 4 \cdot 10^{-15} \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$ ;  $T = 70^\circ \text{C}$ .

Feldstärke am Rande des Dielektrikums 10 000 V/cm, in der Mitte im stationären Zustand 330 V/cm.

Bei niedrigerer Temperatur ist die Randfeldstärke (durch Extrapolation bestimmt) geringer ( $T = 50^\circ \text{C}$ : 8000 V/cm). Dafür erstrecken sich die Inhomogenitäten etwas weiter ins Innere des Dielektrikums.

Die Relaxationszeiten der Potentialdifferenzen betrugen am Rande (0–0,7 mm von den Elektroden entfernt) bei 70°C 1–1,2 min (Stationärstrom  $10^{-9}$  A) und bei 50°C 27 min (Stationärstrom  $3 \cdot 10^{-11}$  A). Diese Relaxationszeiten sind vergleichbar mit jenen der induzierten Ladung. Die Dielektrizitätskonstante der filtrierten Probe beträgt 3,5. Berechnet man aus Randfeldstärke und dielektrischer Verschiebung die auf einer berührenden Metallplatte influenzierte Ladung, so erhält man  $1,4 \cdot 10^{-7}$  Clb (70°C; Elektrodendurchmesser 75 mm).

Die Ladung kann mittels Ladungstrennung im «dissectible capacitor» nach GROSS direkt gemessen werden (es handelt sich um die «scheinbare Oberflächenladung»). Man erhält bei 70°C und für eine Probe gleicher Leitfähigkeit  $1,6 \cdot 10^{-7}$  Clb.

Für einen solchen Potentialverlauf können keine Dipole verantwortlich gemacht werden. Dagegen kann ein solcher Potentialverlauf erhalten werden, wenn man die üblichen Gleichungen für Ionenwanderung im elektrischen Felde für den stationären Zustand löst. Sie lauten:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= q - \alpha p n - b^+ \frac{\partial}{\partial x} (E p) + D^+ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial n}{\partial t} &= q - \alpha p n + b^- \frac{\partial}{\partial x} (E n) - D^- \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Während des Experimentes lassen wir die Spannung konstant. Dies liefert die Randbedingung

$$\int_0^d E dx = V. \quad (2)$$

*Es bedeuten:*

- $p$  positive Ladungsdichte,
- $n$  negative Ladungsdichte,
- $E$  Feldstärke,
- $b^+$  ( $b^-$ ) Beweglichkeit der positiven (negativen) Ionen,
- $D^+$  ( $D^-$ ) Diffusionskoeffizient der positiven (negativen) Ionen,
- $q$  je s und cm<sup>3</sup> neu entstehende Ladung (positiv und negativ),
- $\alpha$  Rekombinationskoeffizient.

*Die Gleichungen setzen voraus:*

1. Erhaltung der Ladung,
2. Geschwindigkeit der Ionen proportional der Feldstärke,
3. Gaskinetische Diffusion,
4. Massenwirkungsgesetz für Rekombination, hier für einwertige Ionen formuliert.

Im stationären Zustand sind die linken Seiten von (1) gleich 0 zu setzen. Man erkennt zunächst zwei Möglichkeiten:

1. Gleichgewicht zwischen Leitungs- und Diffusionsstrom [JAFFÉ<sup>1)</sup>].
2. «Gleichgewicht» zwischen Entstehung der Ionen und Rekombination einerseits, Wanderung im Felde andererseits [ $q - \alpha p n = b \partial/\partial x (E p)$ ] [THOMSON, MIE, HERZFELD<sup>2,3)</sup>].

Beide Theorien setzen für die Berechnung des Feldstärkeverlaufes bestimmte Randbedingungen voraus und liefern in Elektrodennähe einen exponentiellen Abfall der Feldstärke gegen innen. Nach beiden lassen sich aus einer gemessenen Feldstärkeverteilung sowie aus Anfangs- und Stationärstrom die Ionenkonstanten bestimmen.

Nach EINSTEIN gilt folgende Relation:

$$\frac{D}{b} = \frac{kT}{e},$$

$k$  = Boltzmann-Konstante,  $T$  = absolute Temperatur,  $e$  = Ionenladung.

Für  $T = 70^\circ\text{C}$  erhält man  $\sim 3 \cdot 10^{-2}$  V. Deutet man die gemessenen Potentiale nach JAFFÉ, so ergibt sich  $D/b \simeq 500$  V, also eine grössenordnungsmässige

<sup>1)</sup> G. JAFFÉ, *Theorie der Leitfähigkeit polarisierbarer Medien*, Ann. Ph. 16, 217 (1933).

<sup>2)</sup> G. MIE, *Der elektrische Strom in ionisierter Luft in einem ebenen Kondensator*, Ann. Ph. 13, 856 (1904).

<sup>3)</sup> KARL F. HERZFELD, *Nature of Conductivity of Insulating Oils*, Ph. Rev. 287 (1931).

Unstimmigkeit. Da die Relation auf thermodynamischen Grundlagen beruht, müssen wir diese Deutungsmöglichkeit verlassen, obschon JAFFÉ selber solche Unstimmigkeiten zulässt, und die zweite Möglichkeit ins Auge fassen (THOMSON, MIE, HERZFELD). Man erhält auf diese Weise folgende Ionenkonstanten:

$$\begin{aligned}
 T = 70^\circ\text{C}: \quad & b^+ \simeq b^- = 6 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^2/\text{Vs}, \\
 & n_0 = 10^{-6} \text{ Clb/cm}^3 \text{ (Gleichgewichtskonzentration der Ionen)}, \\
 & D = 2 \cdot 10^{-9} \text{ cm}^2/\text{s} \text{ (berechnet nach EINSTEIN)}, \\
 & q = 2,5 \cdot 10^{-10} \text{ A/cm}^3. \\
 T = 50^\circ\text{C}: \quad & b \simeq 3 \cdot 10^{-9} \text{ cm}^2/\text{Vs}, \\
 & n_0 \simeq 3 \cdot 10^{-7} \text{ Clb/cm}^3, \\
 & D \simeq 1 \cdot 10^{-10} \text{ cm}^2/\text{s}.
 \end{aligned}$$

Sowohl die Grösse dieser Ionenkonstanten wie der Temperaturgang sind absolut verständlich. (Nach JAFFÉ dagegen würden sich zum Beispiel Diffusionskoeffizienten von  $10^{-4} \text{ cm}^2/\text{s}$  bei  $70^\circ\text{C}$  ergeben.) Aus den angegebenen Diffusionskoeffizienten wiederum lässt sich berechnen, dass der Diffusionsstrom für die meisten in Betracht fallenden Erwägungen vernachlässigt werden kann.

Setzt man die Leitfähigkeit des Dielektrikums herab, so wird der Potentialverlust im Innern linearer und die Elektrodenladung geringer (Figur 1).

### III. Ströme und Ladungen

Die Lade- und Entladeströme zeigten den bekannten zeitlichen Verlauf.

Lade- und Entladeströme befolgen anfänglich das Ohmsche Gesetz in jedem Zeitpunkt, erst bei grösseren Zeiten ergeben sich Abweichungen. Es gilt überdies näherungsweise die Beziehung, dass der Anfangswert des Ladestromes = Anfangswert des Entladestromes + Stationärstrom (Lade- und Entladestrom positiv gerechnet). Diese Beziehung kann theoretisch hergeleitet werden und erweist sich dann als gültig, wenn die Ladungsträgerzahl im Dielektrikum sich nicht ändert.

Es ist überdies zu bemerken, dass Anfangs- und Stationärwert der Leitfähigkeit durchaus nicht übereinstimmen. Wir sind deshalb gezwungen, ausser den oben angegebenen noch beweglichere Ionen anzunehmen, deren Beitrag zu der Gesamtladung kleiner als 25 % sein wird, wie mittels der Temperaturabhängigkeit der Anfangsleitfähigkeit geschätzt werden kann. Als Ursache für die «permanente» Ladung können sie nicht in Betracht fallen.

Die stationäre Ladung nimmt zu mit wachsender Temperatur, was sich aus der betrachteten Theorie dadurch ergibt, dass die Langevin-Konstante  $b/\alpha$ , wie zu erwarten, mit wachsender Temperatur zunimmt.

Trägt man die Endladeströme logarithmisch auf  $[\log J = f(t)]$ , so erhält man nach kurzer Zeit bei  $70^\circ\text{C}$  «Geraden». Man könnte sie so deuten, dass man annimmt, es entlade sich eine «Polarisationskapazität» über den Probenwiderstand. Die Dicke dieser Polarisationskapazität (die theoretisch mit der Entfernung des Ladungsschwerpunktes von der Elektrode zusammenfällt bei einer exponentiellen Feldverteilung) ergibt sich bei  $70^\circ\text{C}$  zu 0,25 mm. (Aus der Feldverteilung wurden 0,3 mm erhalten.) Diese Polarisationskapazität schwankt von Probe zu Probe und ist nur für Proben mit derselben Leitfähigkeit reproduzierbar.

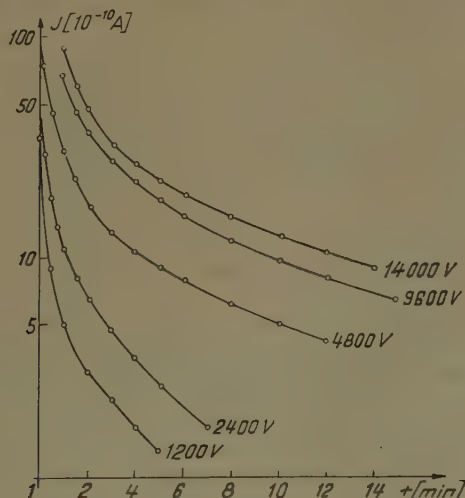
Überhaupt muss an dieser Stelle hervorgehoben werden, dass sämtliche für den Elektreten wichtigen Eigenschaften fest mit der Leitfähigkeit verknüpft sind. Ebenso wie für den Potentialverlauf gilt dies für die Elektrodenladung, die mit sinkender Leitfähigkeit abnimmt.



Unter der Annahme, dass die Leitfähigkeit in Elektrodennähe linear gegen die Elektroden hin abnimmt (in Wirklichkeit nimmt sie exponentiell ab) und im Mittelteil des Dielektrikums konstant bleibt, lässt sich bei dünnen Raumladungsschichten für den Entladestrom in erster Näherung eine Formel von der Form herleiten

$$J(t) = \frac{A e^{-t/T}}{B + t/T},$$

wobei sich  $A$  und  $B$  aus den Ionenkonstanten ergeben. Es wird dabei überdies vorausgesetzt, dass sich die Leitfähigkeit am Rande anfänglich wesentlich lang-



Figur 2

Entladeströme, Karnauba filtriert, Durchmesser 75 mm, Dicke 12 mm,  
 $T = 70^{\circ}\text{C}$ ,  $\log J = f(t)$ .

samer ändert als die Raumladung, was gezeigt werden kann. Diese Formel kommt den tatsächlich gemessenen Strömen recht nahe und zeigt auch, dass die Betrachtungsweise mit der «Polarisationskapazität» für mittlere Zeiten ihre Berechtigung hat, anfänglich aber nicht.

Vergleicht man experimentell

$$\int_0^t J dt \text{ und } Q,$$

das heisst das Stromzeitintegral und die auf die Elektroden influenzierte Ladung, so erkennt man, dass anfänglich kein Leitungsstrom zwischen Dielektrikumoberfläche und angrenzender Elektrode fließt, wie zu erwarten ist. Dies zeigt die Existenz einer Potentialschwelle zwischen Dielektrikum und Metall auf, die aber, makroskopisch betrachtet, bei weitem nicht ausreichen würde, um etwa Ionen im chemischen Sinne «abzuscheiden». Man ist deshalb zur Annahme gezwungen, dass Ladungstransport zwischen Dielektrikum und Elektrode nur an einzelnen aus-

gezeichneten Stellen mit hoher Feldstärke erfolgt [worauf auch BINDER<sup>1)</sup> hinweist]. Denkt man sich die Raumladungen durch Flächenladungen im Ladungsschwer«punkt» ersetzt, so erkennt man, dass diese Flächenladungen zwar abnehmen wegen der Leitfähigkeit des Dielektrikums, aber auch gegen die Elektroden hin wandern. Die Abnahme «ausserherum» wird mit der Zeit (wegen der oben angeführten Potentialschwelle) sehr gering sein, die «Polarisationskapazität» wird aber zunehmen. Für eine  $1\text{ }\mu$  dicke Raumladungsschicht wird folgende Abschätzung erlaubt sein:

$$\begin{aligned} T &\simeq RC/2 \quad (\text{zwei Polarisationskapazitäten in Serie}), \\ R &\simeq 10^{15} \Omega, \\ C/2 &= \varepsilon \varepsilon_0 F/2 d = 3,5 \cdot 8,9 \cdot 10^{-14} \cdot 20 \cdot 10^4 \simeq 6 \cdot 10^{-8} F, \\ T &\simeq 6 \cdot 10^7 \text{ s} > 600 \text{ Tage.} \end{aligned}$$

Dass nur die unmittelbar den Elektroden benachbarte Ladungsschicht für die hohen Relaxationszeiten verantwortlich gemacht werden kann, konnte experimentell gezeigt werden, indem die Potentialdifferenzen im Innern tatsächlich nach einigen Tagen verschwinden, während die Oberflächenladung sich verhält wie bereits dargelegt.

#### IV. Elektrete aus Paraffin mit Beimengungen

Es müsste also möglich sein, Elektrete (mit Heterocharge) aus einer unpolaren Grundsubstanz mit geringen ionalen Beimengungen zu erzeugen. Es wurde deshalb zu Paraffin (Smp.  $90^\circ\text{C}$ ) Mg-Oleat beigegeben (Promille bis Prozent), und es zeigte sich, dass sich die so erzeugten Elektrete sowohl in Ladung wie in der Relaxationszeit mit Karnaubawachs vergleichen lassen. Bei einer Beimengung von drei Gewichtsprozenten Mg-Oleat nahm die erzeugte Ladung während zwei Monaten nicht messbar ab.

Wollte man die hier erzeugte Polarisation auf Dipole zurückführen, so müsste man Mg-Oleat eine statische Dielektrizitätskonstante von mindestens 10 000 zuschreiben.

#### Summary

- (1) It was found that the electret effect of Carnauba wax is caused by the small conductivity of ions in the electric field.
- (2) The constants of ions are calculated following the theory of THOMSON, MIE and HERZFELD.
- (3) Electrets were prepared with high melting paraffins and small impurities.

(Eingegangen: 28. Mai 1955.)

<sup>1)</sup> F. BINDER, Über das permanent polarisierte Dielektrikum, Z. Naturforschung 6a, 714 (1951).

## Mechanismus der Vereisung unterkühlter Wassertropfen durch disperse Keimsubstanzen

Von HANS RUDOLF PRUPPACHER und RAYMUND SÄNGER, Zürich<sup>1)</sup>

### II. Zur Deutung der Eiskeimfähigkeit der Stoffe

#### A. Epitaxie als Ursache der Eiskeimfähigkeit

In der übersichtsweisen Erörterung der experimentellen Ergebnisse über die Eiskeimfähigkeit der Stoffe im ersten Teil dieser Notiz [1]<sup>2)</sup> ist bereits in genügender Weise auf die Schwierigkeiten hingewiesen worden, die Befunde auf Grund kristalliner Verwandtschaft zu verstehen. Weder konnte eine systematische Abhängigkeit vom Gittertypus und der Kristallsymmetrie noch von den geometrischen Abmessungen auf den Spalt- und Wachstumsflächen wahrgenommen werden. Ein markantes Beispiel dafür, dass nicht die oben genannten Beziehungen für die Eiskeimfähigkeit im allgemeinen verantwortlich sein können, liefert die Verbindung Kupfersulfid ( $\text{CuS}$ ), die im kristallinen Aufbau keine verwandtschaftlichen Merkmale mit der Struktur des Eises aufweist und dennoch dieselbe Eiskeimfähigkeit wie Silberjodid ( $\text{AgI}$ ) besitzt.

In einer vorläufigen Mitteilung weist R. MONTMORY [2] darauf hin, dass zufolge kristalliner Verwandtschaft Magnesiumantimon ( $\text{Mg}_3\text{Sb}_2$ ) und Magnesiumtellurid ( $\text{MgTe}$ ) bei höherer Temperatur als  $\text{AgI}$  sich eiskeimaktiv erweisen sollten. In der Tat findet er für  $\text{Mg}_3\text{Sb}_2$  eine Einsatztemperatur von  $-4^\circ$ , während sie nach MONTMORY für  $\text{AgI}$  unter gleichen experimentellen Umständen leicht tiefer liegt. Trotz dieser Beobachtung kann aber auf Grund des gesamten bis jetzt vorliegenden experimentellen Materials die kristalline Epitaxie nicht herangezogen werden, um die Eigenschaft bestimmter Stoffe, die Vereisung unterkühlter Wolken unmittelbar einleiten zu können, *allgemein* zu verstehen; sie kann unserer Auffassung nach höchstens in einzelnen Fällen für den konkreten Ablauf des Vereisungsprozesses mitbestimmend und fördernd sein. Wir werden später auf die von MONTMORY in Diskussion gezogenen Stoffe nochmals kurz zurückkommen.

Das Versagen einer umfassenden Erklärung des Vereisungsvorganges unterkühlter Wolken auf Grund kristalliner Vorstellungen legt es uns nahe, die experimentellen Befunde nach anderen Gesichtspunkten zu sichten, im Bestreben, allfällig zu einer allgemeineren Deutung der Eiskeimfähigkeit zu gelangen; doch muss vollständigkeitshalber zunächst von zwei weiteren Erklärungsversuchen berichtet werden, die ebenfalls auf die Ergebnisse besonderer, teilweise sehr umfangreicher experimenteller Untersuchungen abstellen.

#### B. Das Rausche Gefrierkernspektrum und die Struktur unterkühlten Wassers

In einer Grosszahl von Versuchen hat RAU [3] die Gefriertemperaturen von Wassertropfen, die in einer geschlossenen Kältekammer auf einer blanken Metallunterlage ruhen, bestimmt. Ordnet man seine Beobachtungen in der Weise,

<sup>1)</sup> Physikalisches Institut der ETH.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf Seite 493.

dass man die in einem kleinen Temperaturintervall ausgezählten Erstarrungen als Funktion der zugehörigen Gefrierkernspektrum darstellt, so erhält man das nach RAU benannte Gefrierkernspektrum, welches im Temperaturbereich von 0 bis  $-30^{\circ}$  drei Maxima zeigt, nämlich bei  $-4^{\circ}$ ,  $-12^{\circ}$  und  $-19^{\circ}$ . Während ein bestimmter Gefrierkern eines Tropfens bei Wiederholung des Versuches absinken eine Verminderung seiner Gefrierkeimfähigkeit zeigt, die sich in einem Absinken der Erstarrungstemperatur des Tropfens äussert, übt die Alterung der Kerne auf die Lage der Maxima im Gefrierkernspektrum nur einen untergeordneten Einfluss aus. So können Versuchsbedingungen und Vorgeschichte der Kerne (Wasserproben verschiedener Herkunft, direkt aus atmosphärischem Niederschlag oder verschiedener Vorbehandlung usw.) sich in Gestalt und Höhe dieser Maxima in auffallender Weise, gelegentlich sogar bis zum vollständigen Auslöschen eines Extremums, bemerkbar machen (wobei der Natur der Kerne nur eine sekundäre Rolle zukommt), die Lage der Maxima bleibt aber in der Gesamttemperaturskala praktisch stets erhalten. Allerdings ist nicht klar zu erkennen, ob die Beobachtungen von RAU, auf denen er sein Gefrierkernspektrum aufbaut, auch Messungen an eigentlichen Impfstoffen, wie AgI, mit einschliessen. Wenigstens sind über die Keimfähigkeit dieser Stoffe keine näheren Angaben zu finden.

In der weiteren Entwicklung hat RAU versucht, einen plausiblen Zusammenhang zwischen seinen Wahrnehmungen über die Unterkühlbarkeit der Tropfen und den Laboratoriumsbeobachtungen hinsichtlich der Vereisung unterkühlter Wolken herzustellen. Die von verschiedenen Meteorologen gefundene Häufigkeitskurve für die Temperatur von Schneewolken [4], [5], [6], [7] sind für RAU ein weiterer Beweis für die von ihm postulierte allgemeine Gültigkeit seines Gefrierkernspektrums.

Wie wir im ersten Teil bereits erwähnt haben, zeigen die Einsatztemperaturen der von uns gemessenen eiskeimaktiven Stoffe Maxima bei Temperaturen von  $-4$  bis  $-5^{\circ}$  und von  $-12$  bis  $-13^{\circ}$ . Es wäre aber nicht gerechtfertigt, diese Beobachtungen als weitere Stütze, ja sogar als Erklärung für das Rausche Gefrierkernspektrum heranziehen zu wollen; denn die Auslese der untersuchten Stoffe ist nach vorgezeichneten Richtlinien erfolgt, weshalb die Ergebnisse statistisch nur bedingt im Spektrum eingeordnet werden dürfen.

Wesentlich für unsere Überlegungen ist, dass die von RAU verfochtene Allgemeingültigkeit des Gefrierkernspektrums ihn veranlasst, die Ursache für das Bestehen der 3 Maximalagen nicht mehr in Besonderheiten der Gefrierkerne, sondern einzig in strukturellen Veränderungen des unterkühlten Wassers zu suchen. Über die Struktur des Wassers ist man im Temperaturgebiet über  $0^{\circ}$  seit den röntgenspektroskopischen Untersuchungen von BERNAL und FOWLER [8] und weiterer neuerer Arbeiten hinreichend im Bild. So ist es gelungen, die Anomalie im Temperaturgang der Dichte des Wassers einwandfrei zu erklären und auch die Druckabhängigkeit der Lage des Dichtemaximums zu verstehen. Nach den Beobachtungen von BERNAL und FOWLER besitzt Wasser über  $4^{\circ}\text{C}$  eine vorwiegend quarzartige Struktur, während unter  $4^{\circ}\text{C}$  eine vorwiegend  $\beta$ -tridymitartige Struktur; in beiden Fällen ist der Aufbau durch eine tetraedrische Anordnung der O-Atome gekennzeichnet. Der Übergang von einer Strukturart in die andere vollzieht sich dabei allmählich und stetig. Die Folgerungen von BERNAL und FOWLER sind, abgesehen von der Lage der H-Atome, durch die späteren Beobachtungen, insbesondere durch die röntgenanalytischen Arbeiten von MORGAN und WARREN [9] im grossen und ganzen bestätigt worden; allerdings musste die tridymitartige Struktur dem Begriff einer «zusammengebrochenen Eisstruktur» weichen. Es ist noch zu vermerken, dass gegensätzlich zu den Festkörpern die



Aussagen über die geometrische Anordnung der Atome in Flüssigkeiten nur auf kurze Entfernung zu Recht bestehen und vornehmlich statistische Bedeutung haben.

Inzwischen sind die röntgenspektrographischen Messungen über die Struktur des flüssigen Wassers auch auf das Gebiet des unterkühlten Zustandes ausgedehnt worden. DORSCH und BOYD [10] arbeiteten im Temperaturgebiet von  $+21^{\circ}\text{C}$  bis  $-16^{\circ}\text{C}$ , wobei ihre Röntgenlichtstreu Kurven auch im Gebiet unter  $0^{\circ}$  dieselbe allmähliche und stetige Strukturänderung des Wassers anzeigen, wie sie schon bei Temperaturen über dem Gefrierpunkt zur Genüge bekannt sind<sup>1)</sup>. Ihre Aufnahmen können nur so verstanden werden, dass, je tiefer die Temperatur unter  $0^{\circ}$  sinkt, die Wassermoleküle um so mehr dazu neigen, sich in einer weniger enggepackten Struktur anzuordnen, bei welchem Vorgang die Struktur des Wassers desto eisähnlicher wird. Irgendwelche neue strukturelle Besonderheiten des unterkühlten Wassers treten dabei nicht in Erscheinung; auch der Durchgang durch den Gefrierpunkt vollzieht sich unbemerkt. Mit diesen Ergebnissen stehen, nebenbei vermerkt, die Dichtemessungen von MOHLER [11] an unterkühltem Wasser vollständig im Einklang. Bei dieser Sachlage ist es nicht ohne weiteres verständlich, wie weit die drei von RAU beobachteten Maxima des Gefrierkernspektrums mit den oben erwähnten röntgenspektroskopischen Befunden verträglich sind. Eher dürfte infolge der kontinuierlichen Strukturänderungen ein einziges breites Maximum des Gefrierkernspektrums zu erwarten sein. Jedenfalls sind noch eingehende experimentelle Untersuchungen, die einen direkten Zusammenhang zwischen der Lage der Gefrierkernmaxima und den mutmasslichen Strukturbesonderheiten des Wassers aufzudecken hätten, vonnöten, wenn letztere für das Auftreten der Extrema verantwortlich gemacht werden sollen. Solange dies nicht der Fall ist, bleibt die Deutungsweise von RAU mehr oder weniger ein Postulat, trotzdem unverkennbar Gründe für die Heranziehung des Wassers zur Erklärung des Gefrierkernspektrumverlaufs bestehen.

### C. Adsorption von Wasserdampf an eiskeimaktiven Impfstoffen nach Birstein

Kürzlich hat BIRSTEIN [12] sehr sorgfältig durchgeführte Messungen über die Adsorption von Wasserdampf an den beiden eiskeimaktiven Stoffen Silberjodid ( $\text{AgI}$ ) und Bleijodid ( $\text{PbI}_2$ ) veröffentlicht. Diese im Temperaturbereich von  $+26^{\circ}\text{C}$  und  $-20^{\circ}\text{C}$  ausgeführten Untersuchungen haben gezeigt, dass die Oberfläche dieser beiden Impfstoffe solche Mengen an Wasserdampf aufnehmen kann, wie sie an gewöhnlichen, nicht eiskeimfähigen Stoffen nie üblich sind und daher als kennzeichnend für eiskeimaktive Stoffe vermutet werden müssen. Ferner zeigten bei einer Temperatur von  $-20^{\circ}$  unternommene Messungen einwandfrei, dass eine Adsorption von Wasserdampf an der Oberfläche von  $\text{AgI}$  und  $\text{PbI}_2$  nicht notwendigerweise Wassersättigung zur Bedingung hat. Die beobachteten Adsorptionskurven nähern sich eindeutig und sanft den Eissättigungswerten, wobei die Eisbildung auf der Oberfläche der Impfstoffe bereits vor Erreichung dieser Sättigung beginnt. Nach BIRSTEIN ist demzufolge anzunehmen, dass bereits schon die ersten adsorbierten  $\text{H}_2\text{O}$ -Moleküllagen eine eisähnliche Struktur

<sup>1)</sup> Die markanteste Spitze der Streukurve (Intensität als Funktion des Streuwinkels) weist eine stetige Verschiebung des Streuwinkels von  $13^{\circ}15'$  bei  $21^{\circ}\text{C}$  bis  $12^{\circ}40'$  bei  $-16^{\circ}\text{C}$  auf, während das zweite Streumaximum praktisch in unveränderter Lage bleibt. Die auffallendste Erscheinung ist dabei, wie sich das Minimum zwischen den beiden Hauptmaxima im unterkühlten Zustand des Wassers rasch absenkt und das zweite Streumaximum an Schärfe entsprechend gewinnt.

besitzen. Weist in der Folge die entstandene Schicht eine genügende Dicke (vermutlich von der Grössenordnung von 200 Moleküldurchmessern) auf, kommt ihre Struktur schon ausgesprochen einem wahren Eiskristall nahe.

Die Ergebnisse und Folgerungen BIRSTEINS stehen teilweise im Gegensatz zu den von verschiedener Seite, so zum Beispiel von WEICKMANN [13]<sup>1)</sup> und AUFM KAMPE [14] vertretenen Auffassung, dass für eine merkliche Adsorption von Wasserdampf an der Oberfläche von Stoffen auch unter 0°C praktisch Wassersättigung notwendig ist und dass eine Sublimation, das heisst ein direkter Übergang von dampfförmigem Zustand in den festen, überhaupt nicht möglich ist. Jedenfalls ist es BIRSTEIN gelungen, in einer Kühltruhe, die vollständig tröpfchenfrei war und an den Wänden nur Eis enthielt, nach Ablauf von ungefähr einer Minute nach dem Einstäuben von Silberjodid Eiskriställchen zu beobachten.

Im Sinne der Erklärungsweise von BIRSTEIN stellt die Eiskeimfähigkeit nicht löslicher Impfstoffe eine Oberflächenreaktion dar, die sich ausserordentlich empfindlich auf den Zustand der Oberfläche der festen Impfpartikel erweist. Er erachtet deshalb die Erweiterung seiner Adsorptionsmessungen auf durch Fremdeinwirkung gestörte Oberflächen als notwendig, um so weiteren Einblick in die Natur des Keimfähigkeitsmechanismus zu erhalten. Doch darf nicht übersehen werden, dass BIRSTEIN selber darauf hinweist, dass die Ergebnisse seiner Untersuchungen nicht ausschliessen, dass gleichzeitig noch andere Möglichkeiten für eine Erklärung der Eiskeimbildung bestehen können.

#### D. Erweiterung der Weylschen Theorie der Gefrierkeimfähigkeit

In seiner Arbeit *Surface Structure of Water and Some of Its Physical and Chemical Manifestations* erbringt WEYL [15] den Nachweis, dass die Oberfläche flüssigen Wassers einen wesentlich anderen strukturellen Aufbau als das Innere besitzen muss. Die Wasserstoffatome, deren zugehörige Elektronen zufolge des Zustandekommens der chemischen Bindung praktisch in die Elektronenhülle des O-Atoms übergetreten sind, weisen gegenüber den Sauerstoffatomen eine nur noch verschwindende Polarisierbarkeit auf. Unter diesen Umständen kann aber in der molekularen Anordnung der äussersten Oberflächenschichten Gleichgewicht nur dann bestehen, wenn die Wasserstoffkationen durchschnittlich eine tiefere Lage einnehmen als die Sauerstoffanionen, wodurch sich an der Oberfläche eine elektrische Doppelschicht ausbildet, deren negative Seite aussen liegt. Diese Erscheinung kann auch so gedeutet werden, dass die den einzelnen Wassermolekülen zukommenden elektrischen Dipolmomente für jene Moleküle, die nahe der Oberfläche sitzen, im Mittel nach innen gerichtet sind. Ein Wassertöpfchen besteht demzufolge grosse modo aus einem innern Wasserkern mit quasi tetraedrischer Struktur, wie sie im Abschnitt B erörtert wurde, und einer Oberflächenhaut, deren molekulare Bauelemente mit elektrischen Dipolmomenten ausgerüstet sind, die vorwiegend nach innen zeigen.

Nach der Auffassung WEYLS liegt gerade im Bestehen einer Ausrichtung der molekularen Dipolmomente in der Oberflächenschicht eine der Hauptursachen für die leichte Unterkühlbarkeit der Wassertropfen. Jedenfalls stellt die gleichsinnige Orientierung der Dipolmomente ein Hindernis für die Einleitung des Gefrierprozesses von aussen (das heisst durch Wärmeentzug) dar, indem sie den Übergang zur tetraedrischen Grundstruktur des Eises hemmt. Erst wenn durch irgend-

<sup>1)</sup> Die Notiz WEICKMANNs beschäftigt sich in erster Linie mit der Frage der Begünstigung der Gefrierkeimfähigkeit durch kristalline Verwandtschaft

welche Einflüsse eine Abschwächung der Doppelschicht erfolgt und eine mehr oder weniger ausgeprägte Entkopplung der ausgerichteten molekularen Dipole zustande gekommen ist, kann der Vereisungsvorgang des Tropfens bei einer verhältnismässig noch unbedeutenden Unterkühlung seinen Anfang nehmen.

In der Einführung weist WEYL darauf hin, dass auch Ionenkristalle, wie zum Beispiel Natriumchlorid, bei vollständig trockener Oberfläche eine ähnliche Struktur mit zugehöriger elektrischer Doppelschicht besitzen müssen, weil auch hier dem Kation (Alkalimetall) eine merklich kleinere Polarisierbarkeit als dem Anion (Halogen) zukommt. Bei Zutritt von Feuchtigkeit wird aber, so folgern wir, unmittelbar der Lösungsvorgang eingeleitet und die besondere Oberflächenstruktur mit ihrer charakteristischen Doppelschicht gelöscht. Auch bei unlöslichen, vorwiegend homöopolaren Kristallverbindungen ist anzunehmen, dass unter Umständen die Oberflächenschicht in ähnlicher Weise wie beim NaCl mit einer elektrischen Doppelschicht ausgerüstet ist. Dies wird bei zweiatomiger Bindung zum Beispiel dann zu erwarten sein, wenn dem als Kation anzusprechenden Atom eine kleinere Polarisierbarkeit als seinem Partner zukommt. Auf dieses Bild stützend, hatte WEYL versucht, die Eiskeimfähigkeit von AgI durch die Annahme zu erklären, dass ein AgI-Impfteilchen ebenfalls eine oberflächliche elektrische Doppelschicht (negative Seite aussen, wie bei der Wasseroberfläche) besitzt, die beim Eindringen des Teilchens in die Wasseroberfläche eine Auflockerung der Ausrichtung der molekularen Wasserdipole bewirkt. Nach unserer Auffassung ist es aber bei diesem Vorgang nicht unbedingt notwendig, dass das Impfteilchen tatsächlich in die Oberfläche des Wassertropfchens eindringt, sondern es genügt vollständig, wenn dieses sich dem Wassertropfchen auf molekulare Entfernung nähert; denn die bei dieser Annäherung in Erscheinung tretende Wechselwirkung der Doppelschichten von Impfteilchen und Wassertropfchen, deren Momente im Annäherungspunkt in entgegengesetztem Sinn zeigen, kann bereits die Auflockerung der molekularen Dipolorientierung in der Oberfläche des Wassertropfens nach sich ziehen. Möglicherweise ist damit die stets im Laboratorium beobachtete äusserst rasche Vereisung unterkühlter Wolken beim Impfen mit AgI noch verständlicher gemacht.

Da dem Impfteilchen bei der eben gegebenen Erklärung des Vereisungsvorganges unterkühlter Wolken im strengen Sinne die Rolle eines Gefrierkernes zukommt, sind wir damit zu einer molekularen Deutung der Gefrierkeimfähigkeit gelangt, die aber noch der experimentellen Untermauerung bedarf. Jedenfalls war bis dahin eine nur bescheidene Zahl von aktiven Gefrierkeimstoffen bekannt, die eine systematische Erweiterung der Weilschen Vorstellung noch nicht zulies.

Weil in der obigen Deutung die Gefrierkeimfähigkeit der Stoffe als reine Oberflächenwirkung aufzufassen ist, schien es angezeigt, die von uns gefundenen Beobachtungsergebnisse über die Eiskeimfähigkeit der Stoffe im Rahmen des periodischen Systems der Elemente darzustellen. Figur 1 zeigt eine Tabelle des periodischen Systems, in welcher die Elemente gefrierkeimaktiver Stoffe miteinander durch eine Linie verbunden sind; dabei beschränkt sich die Wiedergabe auf Stoffe, deren Zusammensetzung nur zwei verschiedenartige Elemente enthält. Stoffe, die schon im Temperaturgebiet von  $-10^{\circ}$  bis  $0^{\circ}$  sich als aktiv erweisen, sind durch eine kräftig ausgezogene Linie kenntlich gemacht. Alle Linien beginnen grundsätzlich bei einem Element auf der linken Seite des periodischen Systems und führen mit den entsprechenden Verzweigungen nach ihren Partnern, die stets auf der rechten Seite des Systems liegen. In der Tabelle sind zudem die Werte der Polarisierbarkeiten ( $\alpha \cdot 10^{25} \text{ cm}^{-3}$ ), welche die einzelnen Elemente als freie Ionen besitzen, angegeben; die mit einem Kreuz gekennzeichneten Zahlen







stimmt, unbeschadet, ob es sich dabei um zwei- oder mehratomige Impfstoffe handelt. Dieses Vorgehen ist aber nicht streng korrekt; denn die durch die chemische Bindung vorgezeichnete Elektronenkonfiguration muss für die Impfstoffe, deren Gefrierkeimfähigkeit gegeneinander abgewogen wird, einen gleichartigen Aufbau besitzen. Würden wir zum Beispiel ungeachtet der chemischen Bindung bei konstant gehaltenem Anion und variiertem Kation den nämlichen Vergleich wie oben im umgekehrten Fall ziehen, so könnten wir überhaupt keinen unmittelbaren Zusammenhang zwischen Gefrierkeimfähigkeit und Polarisierbarkeit aus unseren Beobachtungen erkennen.

Vergleichsreihen, von denen wir unter Umständen erwarten dürfen, dass sie einen Einblick in das Verhältnis zwischen Polarisierbarkeit und Keimfähigkeit von zwei- und allfällig auch mehratomigen Impfstoffen vermitteln, erhalten wir, wenn wir zum Beispiel bei festgehaltenem kationartigem bzw. anionartigem Element die Partnerelemente ein und derselben rechts bzw. linksseitigen Kolonne (Unterkolonne) des periodischen Systems entnehmen. Als Vertreter dafür können wir die folgenden Reihen versuchsweise herausgreifen:

a) mit festgehaltenem kationartigem Element

1.	CuCl <i>n</i>	CuBr <i>n</i>	CuI <sup>1)</sup> –4,2	
2.	AgCl –11	AgBr <i>f</i>	AgI –4,0	
3.	CuO –11,7	CuS –4,0	CuSe –4,2	CuTe <i>f</i>
4.	ZnO <i>f</i>	ZnS <i>n</i>	ZnSe –12,3	ZnTe <i>f</i>
5.	Ag <sub>2</sub> O –6,2	Ag <sub>2</sub> S –4,2	Ag <sub>2</sub> Se –11,5	Ag <sub>2</sub> Te <i>f</i>
6.	HgCl <sub>2</sub> <i>f</i>	HgBr <sub>2</sub> <i>n</i>	HgI <sub>2</sub> –13,0	

b) mit festgehaltenem anionartigem Element

7.	CuCl <i>n</i>	AgCl –11,0	AuCl <i>f</i>
8.	CuI –4,2	AgI –5,0	AuI –8,0
9.	ZnSe –12,3	CdSe –4,2	HgSe <i>f</i>
10.	Cu <sub>2</sub> O –5,1	Ag <sub>2</sub> O –6,2	Au <sub>2</sub> O <i>f</i>
11.	HgI <sub>2</sub> –13,0	CdI <sub>2</sub> –15,0	ZnI <sub>2</sub> <i>f</i>

Die aufgeführten Versuchsreihen zeigen, dass bei festgehaltenem Kation unsere Erwartung über die Abhängigkeit der Gefrierkeimfähigkeit von der Polarisierbarkeit des Anions im Falle der zweiatomigen Verbindungen zutrifft, im Falle der dreiatomigen nur in der Versuchsreihe 6, während 5 sich gegenläufig

<sup>1)</sup> Die angeführten Zahlen bedeuten die Einsatztemperatur der Gefrierkeimfähigkeit; die Buchstaben *n*: nicht aktiv bis –18°; und *f*: Beobachtungen fehlen.

erweist. Bei festgehaltenem Anion hingegen zeigt sich im Falle der zweiatomigen Verbindungen nur die Versuchsreihe 8 unseren Erwartungen gemäss (Abnahme der Keimfähigkeit mit zunehmender Polarisierbarkeit des Kations). Die beiden Reihen 7 und 9 verhalten sich gegenläufig. Die für den Fall von dreiatomiger Verbindung aufgezählten Versuchsreihen 10 und 11 zeigen sich, soweit wir die Sache bei den spärlichen Angaben überblicken können, praktisch unberührt von der Änderung der Polarisierbarkeit des Kations.

Das Beobachtungsmaterial weist noch zu viele Lücken auf, um ein abschliessendes Urteil über die hier aufgeworfene Frage des Einflusses der Veränderlichkeit der Polarisierbarkeit auf die Gefrierkeimfähigkeit zu fällen. Von den für eine Beurteilung wichtigen zweiatomigen Impfstoffen fehlen unter anderem das leicht zersetzbare Silberbromid ( $\text{AgBr}$ ) und die Telluride von Cu, Zn und Ag. Auch wäre es bei der Spärlichkeit an Messungen noch verfrüht, weitere Versuchsreihen aufstellen und erörtern zu wollen. Vielmehr ist es unumgänglich, das Erfahrungsmaterial vorerst merklich zu ergänzen. Schliesslich ist an dieser Stelle noch auf die von MONTMORY hinsichtlich des Epitaxieeinflusses in Diskussion gezogenen Manganverbindungen  $\text{Mg}_2\text{Sb}_3$  und  $\text{MgTe}$  zurückzukommen, um festzustellen, dass diese beiden als eiskeimaktiv erkannten Stoffe sich ohne weiteres in das von uns in Tabelle 1 aufgestellte Schema einfügen lassen<sup>1)</sup>.

Für die Klärung der Frage nach der Abhängigkeit der Eiskeimfähigkeit der Stoffe von den Polarisierbarkeiten der beteiligten Atome, oder allgemein ausgedrückt, von den Oberflächenkräften zwischen Impfteilchen und Wassertröpfchen, werden Versuche über die Gefrierkeimfähigkeit, bei denen die Oberfläche der Impfteilchen durch künstliche Beeinflussung gestört wird, besonders wertvoll, wenn nicht sogar entscheidend sein. Vorteilhafterweise hätten sich diese Versuche zunächst auf zweiatomige Stoffe zu beschränken. Liegen die Ergebnisse solcher Messungen vor und sind die vorhin erwähnten Lücken im Erfahrungsmaterial grösstenteils geschlossen, wird auch der Zeitpunkt gekommen sein, sich mit dem Beobachtungsmaterial von RAU und insbesondere mit der von ihm vertretenen Allgemeingültigkeit des Gefrierkeimspektrums auseinanderzusetzen.

Es darf nicht übersehen werden, dass die bei gefrierkeimaktiven Stoffen gefundene starke Unterschiedlichkeit der Polarisierbarkeiten nicht als eine hinreichende Bedingung für das Auftreten der Gefrierkeimfähigkeit betrachtet werden darf. Vermutlich werden Stoffe bestehen, die dieser Bedingung genügen und dennoch nicht gefrierkeimaktiv sind. Eine zweite Bedingung scheint erfahrungsgemäss ebenfalls erfüllt sein zu müssen, nämlich die Unlöslichkeit (oder zumindestens nur äusserst geringe Löslichkeit) des Impfstoffes in Wasser, wodurch die Löschung der oberflächlichen Doppelschicht durch den Lösungsvorgang nicht in Erscheinung treten kann. Dies deutet darauf hin, dass lösliche Impfstoffe nur bei vollständig trockener Oberfläche im Sinne der erweiterten Weylschen Vorstellungen gefrierkeimaktiv sein könnten. Dem steht aber entgegen, dass lösliche Stoffe allgemein eine merkliche Hygroskopizität zeigen.

Abschliessend muss noch ausgesagt werden, dass dem in diesem Abschnitt erörterten Versuch einer Erklärung der Gefrierkeimfähigkeit schlechthin nur die Bedeutung eines Diskussionsvorschlages zukommt. Ihm mehr beizumessen, wäre in Anbetracht der, gesamthaft betrachtet, noch merklichen Spärlichkeit des Beobachtungsmaterials zu gewagt. Auch ist der Gedanke BIRSTEINS, dass unter

<sup>1)</sup> S. S. BIRSTEIN und C. E. ANDERSEN [16] veröffentlichten kürzlich Messungen über die Gefrierkeimfähigkeit von Stoffen unter gleichzeitiger Bezugnahme auf frühere Messungen von C. L. HOSLER [17]. Da alle Beobachtungen sich auf die Temperatur von  $-20^\circ\text{C}$  beschränken, nehmen wir von einer direkten Gegenüberstellung mit den von uns erörterten Messergebnissen Umgang.

Umständen nicht nur ein *einzig*er Mechanismus für die Eiskeimfähigkeit verantwortlich gemacht werden kann, ebenfalls noch weiter zu verfolgen.

## LITERATUR

- [1] R. PRUPPACHER und R. SÄNGER, ZAMP 6, 407–416 (1955).
- [2] R. MONTMORY, Bull. Obs. Puy Dôme 33 (1955).
- [3] Eine Übersicht über die Arbeiten von W. RAU ist zu finden in seinem Referat am Internationalen Symposium für experimentelle Meteorologie in Zürich, veröffentlicht in Arch. Meteor. Geoph. Biokl. [A] 8, 185 (1955).
- [4] W. PEPPLER, Z. angew. Meteor. 56, 173 (1939).
- [5] W. SCHERDTFEGER, Meteor. Rdsch. 1, 453 (1949).
- [6] E. HOWELL, Trans. amer. geophys. Union 32, 179 (1951).
- [7] M. BOSSOLASCO, Nature 74, 362 (1954).
- [8] J. D. BERNAL und R. H. FOWLER, J. Chem. Phys. 7, 515 (1933).
- [9] J. MORGAN und B. E. WARREN, J. Chem. Phys. 6, 666 (1938).
- [10] G. DORSCH und B. BOYD, NACA, Techn. Note 2532 (1951).
- [11] J. F. MOHLER, Phys. Rev. 35, 236 (1912).
- [12] G. J. BIRSTEIN, Airforce Cambridge Research Center, Geophys. Res. Paper 32 (1954); J. Meteor. 12, 324 (1955).
- [13] H. K. WEICKMANN, Arch. Meteor. Geophys. Biokl. [A] 4, 309 (1951).
- [14] H. J. AUFM KAMPE, H. K. WEICKMANN und J. J. KELLY, J. Meteor. 8, 168 (1951).
- [15] W. A. WEYL, *Surface Structure of Water and Some of Its Physical and Chemical Manifestations*, J. Colloid Sci. 6, 389 (1951).
- [16] S. S. BIRSTEIN und C. E. ANDERSEN, J. Meteor. 12, 68 (1955).
- [17] C. L. HOSLER, J. Meteor. 8, 326 (1951).

## Summary

The results of the measurements published in the first part of this report are compared to the existant attempts at explanation of the ice nucleability of substances. Of these only the interpretation of the nucleability of supercooled clouds proposed by WEYL can, somewhat extended, be deemed to fit actual observations. It is found in the case of 2-atomic seeding substances that one of the elements (the one on the left-hand side of the periodic system) must be remarkably less polarizable than the partner (on the right-hand side of the periodic system). Another characteristic property of the seeding substances found to be active is their non-solubility in water. The forces responsible for the nucleability of the substances are those which also determine the structure of the surface of the seeding particles and of the water droplets.

(Eingegangen: 6. September 1955.)

## Zur Berechnung der Geschossabweichung unter dem Einfluss eines Seitenwindes

VON ERNST ROTH-DESMEULES, Luzern

Erfolgt die Bewegung eines artilleristischen Geschosses nicht in einer ruhenden Atmosphäre, sondern in einer senkrecht zur ungestörten Flugbahnebene bewegten (herrscht also Seitenwind), so führt dies zu einer seitlichen Abweichung des Geschosses; diese kann nach der Näherungsformel

$$z_w = w_z \left( T - \frac{X}{v_0 \cos \vartheta_0} \right) \quad (1)$$

berechnet werden. Hier bedeuten:  $z_w$  seitliche Abweichung,  $w_z$  Windstärke,  $T$  Flugzeit,  $X$  horizontale Flugdistanz (der ungestörten Flugbahn),  $v_0$  Anfangsgeschwindigkeit,  $\vartheta_0$  Abschusswinkel. In den meisten Hand- und Lehrbüchern der Ballistik wird bemerkt, dass diese Formel auf Grund der vorgenommenen Vernachlässigungen nur für steile Flugbahnen nicht mehr genügend genau sei<sup>1)</sup>. Nun zeigt aber die numerische Rechnung, dass im allgemeinen die Näherung auch für sehr steile Bahnen, die nur wenige Grad vom Schuss senkrecht aufwärts abweichen, noch ausserordentlich gut ist, indem der relative Fehler unter  $10^{-4}$  bleibt. Dies soll im folgenden näher untersucht werden.

Es werde ein Koordinatensystem eingeführt, so dass die  $x$ -Achse horizontal in die Schussrichtung zeigt, die  $y$ -Achse senkrecht nach oben, und schliesslich soll die  $z$ -Achse das rechtshändige System vervollständigen. Betrachten wir zunächst die Flugbahn bei ruhender Luft, dann lauten die Differentialgleichungen der in einer Ebene erfolgenden Geschossbewegung

$$\ddot{x}_n = -\Phi_n \dot{x}_n, \quad \ddot{y}_n = -\Phi_n \dot{y}_n - g(y_n). \quad (2)$$

Anfangsbedingungen für  $t = 0$ :  $x_n = y_n = 0$ ,  $\dot{x}_n = v_0 \cos \vartheta_0$ ,  $\dot{y}_n = v_0 \sin \vartheta_0$ . Die Funktion  $\Phi_n = \Phi_n(\dot{x}_n, \dot{y}_n, y_n)$  ist proportional dem durch die Geschwindigkeit  $v_n = (\dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2)^{1/2}$  dividierten Luftwiderstand. Der Index  $n$  deutet darauf hin, dass es sich um die *Normalbahn* handelt.

Weht nun ein Wind  $w_z$  normal zur Flugbahnebene ( $x, y$ ), dann nehmen die Bewegungsdifferentialgleichungen die Form an:

$$\ddot{x}_w = -\Phi_w \dot{x}_w, \quad \ddot{y}_w = -\Phi_w \dot{y}_w - g(y_w), \quad \ddot{z}_w = -\Phi_w (\dot{z}_w - w_z) \quad (3)$$

Anfangsbedingungen für  $t = 0$ :

$$x_w(0) = y_w(0) = z_w(0) = 0, \quad \dot{x}_w(0) = v_0 \cos \vartheta_0 = \dot{x}_0, \quad \dot{y}_w(0) = v_0 \sin \vartheta_0 = \dot{y}_0, \quad \dot{z}_w(0) = 0.$$

Die Geschwindigkeit ist  $v_w^2 = \dot{x}_w^2 + \dot{y}_w^2 + (\dot{z}_w - w_z)^2$ . Dies ist die sogenannte *Windbahn*.

Vermöge der Transformation

$$x_w = x_r \cos \psi, \quad y_w = y_r, \quad z_w = w_z t_r - x_r \sin \psi \quad (4)$$

<sup>1)</sup> Zum Beispiel: C. CRANZ, *Aussere Ballistik*, Bd. 1 (Springer, Berlin 1925), S. 301. H. ATHEN, *Ballistik* (Quelle und Meyer, Leipzig 1941), S. 215.



werde ein mit der Atmosphäre bewegtes Koordinatensystem eingeführt. Es ist

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{w_z}{\dot{x}_0}, \quad \sin \psi = \frac{w_z}{(\dot{x}_0^2 + w_z^2)^{1/2}}, \quad \cos \psi = \frac{\dot{x}_0}{(\dot{x}_0^2 + w_z^2)^{1/2}}. \quad (5)$$

Setzt man die Grössen (4) in (3) ein, dann fallen die erste und dritte Differentialgleichung zusammen, und für die *Relativbahn*, die wiederum eine ebene Flugbahn ist, gilt

$$\ddot{x}_r = -\Phi_r \dot{x}_r, \quad \ddot{y}_r = -\Phi_r \dot{y}_r - g(y_r). \quad (6)$$

Anfangsbedingungen für  $t = 0$ :

$$x_r = y_r = 0, \quad \dot{x}_r(0) = \frac{\dot{x}_w(0)}{\cos \psi} = (\dot{x}^2 + w_z^2)^{1/2}, \quad \dot{y}_r(0) = \dot{y}_0.$$

In diesem Koordinatensystem haben wir also eine normale Flugbahn vor uns, allerdings mit neuen Anfangsbedingungen. Für die Änderung der Anfangselemente gilt in erster Näherung

$$\Delta v_0 = \frac{w_z^2}{2 v_0}, \quad \Delta \vartheta_0 = -\frac{1}{2} \left( \frac{w_z}{v_0} \right)^2 \operatorname{tg} \vartheta_0.$$

Die Projektion dieser Relativbahn auf die  $(x_n, y_n)$ -Ebene genügt denselben Anfangsbedingungen wie die Normalbahn. Die Differentialgleichungen (2) und (6) unterscheiden sich jedoch im Werte der Funktion  $\Phi$ . Es ist

$$\Phi_n = \Phi_n(v_n, y_n) \quad \text{mit} \quad v_n^2 = \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2$$

und

$$\Phi_r = \Phi_r(v_r, y_r) \quad \text{mit} \quad v_r^2 = v_n^2 + w_z^2.$$

Ferner ist

$$v_0 = v_n = v_r \cos \omega, \quad \text{mit} \quad \operatorname{tg} \omega = \frac{w_z}{v_0}.$$

Wenn nun für  $t = 0$  auch  $\Phi_n = \Phi_r$  ist, dann stimmen nach dem Eindeutigkeitssatz für die Lösungen von Differentialgleichungen die Integrale im ganzen Verlauf überein. Nun ist, wenn nur die wesentlichen Grössen hervorgehoben werden

$$\Phi(v, y) = \frac{h(y)}{v} F(v).$$

Die obige Gleichheit ist damit erfüllt, wenn

$$\frac{1}{v_n} F(v_n) = \frac{1}{v_r} F(v_r)$$

oder

$$F(v_r \cos \omega) = F(v_r) \cos \omega.$$

Diese Beziehung ist nur möglich, wenn  $F$  eine lineare Funktion von  $v$  ist.

$$F(v) = c v. \quad (7)$$

In diesem Falle wird die Bewegung in der  $(x, y)$ -Ebene unabhängig von der seitlichen Abweichung.

In Wirklichkeit ist die Funktion  $F(v)$  nicht allein von der Geschwindigkeit  $v$ , sondern von der Machschen Zahl  $M = v/s$  abhängig. Der Einfluss der von der

Höhe  $\gamma$  (das heisst der Temperatur) abhängigen Schallgeschwindigkeit spielt hier aber keine grosse Rolle, und  $F$  ist, als Funktion von  $v$  allein betrachtet, nahezu linear, wie die Abbildung für zwei verschiedene Fälle zeigt<sup>1)</sup>. Dies gilt im allgemeinen für Geschwindigkeiten, die grösser sind als die Schallgeschwindigkeit, und zwar ebensogut für Flachbahnen wie auch für Steilbahnen.

Für die seitliche Abweichung des Geschosses folgt aus den Transformationsformeln (4) mit Hilfe von (5)

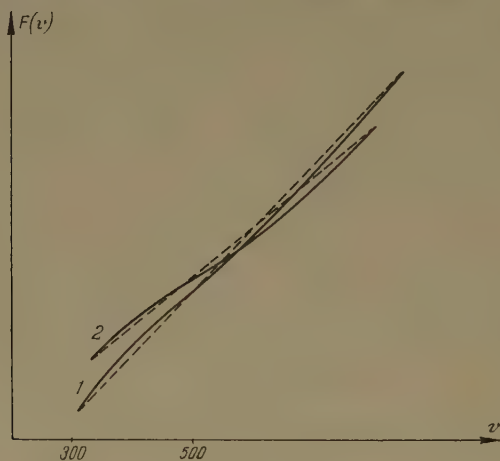
$$z_w = w_z t - x_r \sin \psi = w_z t - \frac{x_w w_z}{\dot{x}_0}.$$

Da in unserem Falle unter der Voraussetzung (7)  $x_w = x_n$  ist, so erhalten wir die in der Einleitung gegebene, nun exakt gültige Formel (1)

$$z_w = w_z \left( t - \frac{x_n}{\dot{x}_0} \right),$$

wo auf der rechten Seite die Werte der Normalbahn (2) stehen.

Bemerkenswert ist noch, dass sich die Beziehung  $x_w \approx x_n$  bereits aus der Kenntnis der Flugbahngrössen der Normalbahn — nämlich aus der approximativen Gültigkeit der Beziehung (7) — ergibt, unabhängig von der zusätzlichen Be-



Figur 1

Die Funktion  $F(v)$  für zwei verschiedene Luftwiderstandsgesetze. 1 Flachbahn, 2 Steilbahn.

stimmung der Einflusskoeffizienten für eine  $\Delta v_0$ - und eine  $\Delta \theta_0$ -Störung, die sonst erforderlich wäre, um die Elemente der Relativbahn (6) aus der Normalbahn (2) zu berechnen.

Die Formel (1) gibt uns den Einfluss eines konstanten, längs der ganzen Flugdauer wirkenden Seitenwindes. Es ist offensichtlich, wie sie umzuformen ist, wenn der Wind nicht zur Zeit  $t = 0$ , sondern erst zu einem spätern Zeitpunkt einsetzt. Das Entsprechende gilt auch in diesem Falle.

<sup>1)</sup> Eine additive Konstante ist, da  $\cos \omega$  nahe 1 liegt, praktisch belanglos.

Zusammenfassend kann damit gesagt werden, dass bei Überschallgeschwindigkeiten die einfache Formel (1) den Einfluss des Seitenwindes sowohl für flache als auch für steile Flugbahnen sehr gut wiedergibt.

### Summary

The first order correction which should be made to the  $z$ -coordinate of the standard trajectory of a projectile to account for a cross-wind is given by (1). It is shown that this formula is a very good approximation also for angles of departure near  $90^\circ$ .

(Eingegangen: 13. April 1955.)

## Bemerkungen zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen $n$ -ter Ordnung

Von HEINZ RUTISHAUSER, Zürich<sup>1)</sup>

Es ist bekannt, dass man eine Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung in ein System von  $n$  Differentialgleichungen erster Ordnung verwandeln kann; davon macht man insbesondere für die numerische Integration gerne Gebrauch. Es besteht aber auch die Möglichkeit, eine Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung direkt – das heisst ohne Verwandlung in ein System – numerisch zu integrieren, nämlich mit den Formeln von KUTTA-NYSTRÖM<sup>2)</sup>, bzw. KUTTA-ZURMÜHL<sup>3)</sup>.

Abgesehen von anderen Vorteilen, wird den beiden letztgenannten Integrationsverfahren eine auffallend grosse Genauigkeit nachgerühmt. Der Verfasser hat daher versucht, die verschiedenen Verfahren auf ihre Genauigkeit zu vergleichen, und zwar durch Anwendung auf lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Für diese kann man nämlich sowohl die Differentialgleichung als auch die durch das numerische Verfahren induzierte Differenzgleichung exakt lösen. Dadurch war es möglich, die Untersuchung zum grössten Teil analytisch durchzuführen, einige zusätzliche numerische Rechnungen wurden mit der Z4 durchgeführt.

Die Herleitung der Ergebnisse ist in einem internen Bericht des Instituts für angewandte Mathematik der ETH. festgehalten; wir geben hier lediglich die Resultate wieder.

1. Die Formeln von RUNGE-KUTTA (für Differentialgleichungen 1. Ordnung), KUTTA-NYSTRÖM (für Differentialgleichungen 2. Ordnung) und KUTTA-ZURMÜHL (für Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung,  $n > 2$ ) haben alle dieselbe Genauigkeitsordnung 4, das heisst, der Fehler bei numerischer Integration mit der Schrittweite  $h$  über ein festes Intervall ist bei allen diesen Verfahren  $\sim c h^4$ . Dies gilt auch dann, wenn die Differentialgleichung von der Form  $y^{(n)} = f(x, y)$  ist; allerdings wird dann der Koeffizient  $c$  (vor  $h^4$ ) mit wachsendem  $n$  kleiner. Die verschiedentlich behauptete Vergrösserung der Genauigkeitsordnung mit wachsendem  $n$  trifft nur für die ersten Integrationsschritte zu und ist darum ohne praktische Bedeu-

<sup>1)</sup> Institut für angewandte Mathematik der ETH.

<sup>2)</sup> Siehe Literatur [1] oder auch [4], Kap. I, § 3.2.

<sup>3)</sup> Siehe Literatur [2] oder auch [4], Kap. I, § 3.2.

tung. Überdies hat der Verfasser festgestellt, dass bei Integration der Gleichung

$$\left(\frac{d}{dx} - 1\right)^n y \equiv y^{(n)} - \binom{n}{1} y^{(n-1)} + \binom{n}{2} y^{(n-2)} - + \dots \pm y = 0$$

nach KUTTA-ZURMÜHL auffallend grosse Fehler entstehen.

2. In ähnlicher Weise untersuchte der Verfasser die Integrationsformeln von ADAMS-FALKNER<sup>1)</sup>, die man durch Übertragung der Adamschen Methode auf Differentialgleichungen höherer Ordnung erhält. Die Resultate dieser Untersuchungen sind den unter 1. genannten Ergebnissen völlig analog. *Die Genauigkeitsordnung des Verfahrens von ADAMS-FALKNER (Extrapolation oder Interpolation) hängt nur von der Anzahl der mitgeführten Differenzen  $\Delta x$  in den Formeln (5. 22) bzw. (5. 32) bei COLLATZ [4] Kap. I, ab, jedoch nicht von  $n$ .*

### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] J. E. NYSTRÖM, *Über die numerische Integration von Differentialgleichungen*, Acta Soc. Sci. fennicae 50, Nr. 13, 1–55 (1925).
- [2] R. ZURMÜHL, *Runge-Kutta-Verfahren zur numerischen Integration von Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung*, ZAMM 28, 173–182 (1948).
- [3] M. V. FALKNER, *A Method of Numerical Solution of Differential Equations*, PhilMag. [7] 21, 621–640 (1936).
- [4] L. COLLATZ, *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen* (Verlag Springer, Berlin, Göttingen und Heidelberg 1951), 458 S.

### Summary

The author reports on the results of an investigation concerning the accuracy of the so called Kutta-Zurmühl formula [2] for numerical integration of ordinary  $n$ -th order differential equations. If one integrates with step-length  $h$  over a fixed interval, the error of this formula is  $\sim h^4$  (for small  $h$ ), irrespective of  $n$  (and not  $\sim h^{n+2}$  as it has been claimed).

(Eingegangen: 14. Mai 1955.)

## Torsion of a Circular Shaft Press-fitted with a Disc

By HIDEO SAITO, Sendai, Japan<sup>2)</sup>

For a shaft of varying circular cross-section under the action of torsion, it is shown that the displacement of any point is directed at right angles to the axial plane passing through the point<sup>3)</sup>. If this displacement is denoted by  $v$  and if polar coordinates  $(r, \theta, z)$  are used with the axis of the shaft as the  $z$ -axis, the stress distribution in the shaft is determined by a solution of the partial differential equation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0, \quad (1)$$

<sup>1)</sup> Siehe Literatur [3], oder auch [4], Kap. I, § 5.4, und 5.5.

<sup>2)</sup> Department of Mechanical Engineering. The Tohoku University.

<sup>3)</sup> S. TIMOSHENKO, *Theory of Elasticity* (McGraw-Hill Book Comp., 1934), p. 276.



and the stresses are given by

$$\tau_{\theta z} = G \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \tau_{r\theta} = G r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v}{r} \right), \quad (2)$$

where  $G$  is the modulus of rigidity. In this report, we discuss the torsional problem for a circular shaft press-fitted with a disc or a wheel. The outer diameters of the shaft and the disc are denoted by  $2a$  and  $2b$ , the thickness of the disc is  $h$  (Figure 1). In order to simplify the analysis, we shall proceed with our calculations assuming that a slip does not occur on the contact surface between the shaft and the disc and that at a great distance from the disc the stress in the shaft becomes a state of pure shear and its moment is  $M$ . For the shaft and the disc, the notations I and II are used respectively.

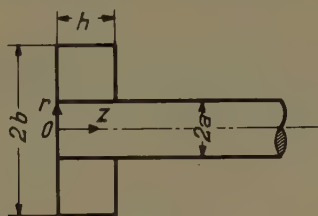


Figure 1

Circular shaft press-fitted with a disc

The boundary conditions to be satisfied are

$$(a) \quad \tau_{\theta z}^{\text{II}} = 0 \quad (z = 0, h), \quad (3)$$

$$2\pi b^2 \int_0^h \tau_{r\theta}^{\text{II}} dz = -M \quad (r = b). \quad (4)$$

$$(b) \quad \text{On } r = a \quad \tau_{r\theta}^{\text{I}} = \tau_{r\theta}^{\text{II}} \quad (0 \leq z < h), \quad \tau_{r\theta}^{\text{I}} = 0 \quad (z > h), \quad (5)$$

$$v^{\text{I}} = v^{\text{II}} \quad (0 \leq z < h). \quad (6)$$

$$(c) \quad \tau_{\theta z}^{\text{I}} = \frac{\tau r}{a} \quad (z = \infty), \quad (7)$$

where  $\tau$  is the circumferential shearing stress of the simply twisted part.

Considering the boundary conditions, we may introduce the following expressions for displacements and stresses.

For the disc:

$$\left. \begin{aligned} G^{\text{II}} v^{\text{II}} &= -\tau \left[ A_0 \frac{a^2}{2r} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{K_1(\alpha_n r)}{\alpha_n K_2(\alpha_n a)} \cos \alpha_n z \right], \\ \tau_{r\theta}^{\text{II}} &= \tau \left[ A_0 \frac{a^2}{r^2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{K_2(\alpha_n r)}{K_2(\alpha_n a)} \cos \alpha_n z \right], \\ \tau_{\theta z}^{\text{II}} &= \tau \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{K_1(\alpha_n r)}{K_2(\alpha_n a)} \sin \alpha_n z \quad \left( \alpha_n = \frac{n\pi}{h} \right). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

For the shaft:

$$\left. \begin{aligned} G^I v^I &= \tau \left[ B r + \frac{2a}{\pi} \int_0^\infty F(\alpha) \frac{I_1(\alpha \varrho)}{\alpha I_2(\alpha)} \cos \alpha x d\alpha \right], \\ \tau_{r\theta}^I &= \frac{2\tau}{\pi} \int_0^\infty F(\alpha) \frac{I_2(\alpha \varrho)}{I_2(\alpha)} \cos \alpha x d\alpha, \\ \tau_{\theta z}^I &= -\frac{2\tau}{\pi} \int_0^\infty F(\alpha) \frac{I_1(\alpha \varrho)}{I_2(\alpha)} \sin \alpha x d\alpha \quad \left( x = \frac{z}{a}, \varrho = \frac{r}{a} \right), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

where  $I$  and  $K$  are modified Bessel functions of the first and the second kinds,  $A_n$ ,  $B$  are arbitrary constants, and  $F(\alpha)$  is a function of  $\alpha$ .

$\tau_{\theta z}^{\text{II}}$  already satisfies the condition (3). Also on  $r = a$

$$\tau_{r\theta}^{\text{II}} = \tau \left[ A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \alpha_n z \right].$$

From condition (5) and a Fourier transformation follows

$$F(\alpha) = A_0 \frac{\sin(\alpha h/a)}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (-1)^n \frac{\alpha \sin(\alpha h/a)}{\alpha^2 - (\alpha_n a)^2}.$$

Substituting this into equation (9) and equating  $v^I$  to  $v^{\text{II}}$ , we have by the usual Fourier analysis

$$\left. \begin{aligned} A_s + 4 \frac{G^{\text{II}}}{G^I} \left( \frac{a}{h} \right)^2 (-1)^s s \frac{K_2(\alpha_s a)}{K_1(\alpha_s a)} \sum_{n=1}^{\infty} A_n (-1)^n d_{n,s} \\ = -4 \frac{G^{\text{II}}}{G^I} \left( \frac{a}{h} \right)^2 (-1)^s s \frac{K_2(\alpha_s a)}{K_1(\alpha_s a)} A_0 c_s, \\ -B = \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{G^I}{G^{\text{II}}} \right) + \frac{2a}{\pi h} c_0 \right\} A_0 + \frac{2a}{\pi h} \sum_{n=1}^{\infty} A_n (-1)^n c_n \\ (s = 1, 2, 3, \dots), \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

where

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= \int_0^\infty \frac{I_1(\alpha) \sin^2(\alpha h/a)}{\alpha^3 I_2(\alpha)} d\alpha, \quad c_n = \int_0^\infty \frac{I_1(\alpha) \sin^2(\alpha h/a)}{\alpha (\alpha^2 - \alpha_n^2 a^2) I_2(\alpha)} d\alpha, \\ d_{n,s} &= \int_0^\infty \frac{\alpha I_1(\alpha) \sin^2(\alpha h/a)}{(\alpha^2 - \alpha_n^2 a^2) (\alpha^2 - \alpha_s^2 a^2) I_2(\alpha)} d\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

The integrals of equation (11) follow from the theorem of residue:

$$\left. \begin{aligned} c_n &= - \left\{ 2\pi \frac{h/a}{(\alpha_n a)^2} + \frac{\pi}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda_m^2 h/a}}{\lambda_m (\lambda_m^2 + \alpha_n^2 a^2)} \right\}, \\ d_{n,s} &= - \frac{\pi}{2} \sum_{m=1}^{\infty} m e_{n,s} \quad (n \neq s), \\ &= \frac{1}{4n} \left( \frac{h}{a} \right)^2 \frac{I_1(\alpha_n a)}{I_2(\alpha_n a)} - \frac{\pi}{2} \sum_{m=1}^{\infty} m e_{n,s} \quad (n = s), \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

where

$$m e_{n,s} = \frac{\lambda_m (1 - e^{-\lambda_m^2 h/a})}{(\lambda_m^2 + \alpha_n^2 a^2) (\lambda_m^2 + \alpha_s^2 a^2)} \quad (13)$$

and  $\lambda_m$  is the  $m$ -th root of  $\lambda^{-2} J_2(\lambda) = 0$ , in which  $J_2$  is the Bessel function of the first kind.

Substituting equation (12) into equation (10), we have

$$A_s - \sum_{n=1}^{\infty} A_n (-1)^n Q_{n,s} = A_0 i_s \quad (s = 1, 2, 3, \dots), \quad (14)$$

where

$$\left. \begin{aligned} Q_{ns} &= 2\pi \frac{G^{\text{II}}}{G^{\text{I}}} \left( \frac{a}{h} \right)^2 \frac{(-1)^s s K_2(\alpha_s a)}{\delta_s K_1(\alpha_s a)} \sum_{m=1}^{\infty} m e_{n,s}, \\ i_s &= -4 \frac{G^{\text{II}}}{G^{\text{I}}} \left( \frac{a}{h} \right)^2 \frac{(-1)^s s c_s K_2(\alpha_s a)}{\delta_s K_1(\alpha_s a)}, \\ \delta_s &= 1 + \left( \frac{G^{\text{II}}}{G^{\text{I}}} \right) \frac{K_2(\alpha_s a) I_1(\alpha_s a)}{K_1(\alpha_s a) I_2(\alpha_n a)}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Now, we shall determine the value of  $A_0$ . The limiting value of  $\tau_{\theta z}^{\text{I}}$  in equation (9) for  $x = \infty$  becomes

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tau_{\theta z}^{\text{I}} = -4\tau A_0 \left( \frac{h}{a} \right) e.$$

Comparing this with condition (7), we find

$$A_0 = -\frac{a}{4h},$$

and condition (4) also is satisfied.

The series of  $d_{n,s}$  do not converge rapidly when  $n$  and  $s$  are large. For large values of  $m$ , we therefore substitute for  $\lambda_m$  its asymptotic value  $[m + (3/4)\pi]^{1/2}$ . Applying EULER'S summation formula<sup>2)</sup> to the series directly, we have

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} m e_{n,s} &= \sum_{m=1}^{m'-1} m e_{n,s} + \frac{1}{2\pi a^2 (\alpha_n^2 - \alpha_s^2)} \log \frac{\lambda_{m'}^2 + (\alpha_n a)^2}{\lambda_{m'}^2 + (\alpha_s a)^2} \\ &\quad + \frac{\lambda_{m'}}{2(\lambda_{m'}^2 + \alpha_n^2 a^2)(\lambda_{m'}^2 + \alpha_s^2 a^2)} + \dots \end{aligned}$$

If we take the appropriate value of  $m'$ , the sum of the series is precisely calculated.

<sup>1)</sup> G. N. WATSON, *Theory of Bessel Functions* (Cambridge University Press, 1922), p. 507.

<sup>2)</sup> T. J. I. A. BROMWICH, *Theory of Infinite Series* (Macmillan & Co., London, 1926), p. 304.

The unknown constants  $A_n$  can be obtained in each particular case from equation (14) by the method of successive approximations. Numerical calculations have been carried out for the case  $h/a = \pi/2$ ,  $b/a = 2$ ,  $G^I = G^{II}$ . Taking the first 11 terms of the series, we obtain the following values of  $A_n$ :

Table

$n$	1	2	3	4	5	6
$A_n$	0.2281	- 0.1536	0.1147	- 0.0921	0.0774	- 0.0672

$n$	7	8	9	10	11
$A_n$	0.0595	- 0.0536	0.0489	- 0.0450	0.0417

Actually, the convergency is very slow for stresses on  $r = a$ . Hence methods similar to those used in a previous paper<sup>1)</sup> have been applied for the computation of the stresses on  $r = a$ . In Figures 2 and 3, the stress distributions in the shaft are shown. The curves of constant resultant shearing stress ( $\sqrt{\tau_{r\theta}^2 + \tau_{\theta z}^2}/\tau = \text{constant}$ ) and  $v/r = \text{constant}$  are shown in Figure 4.

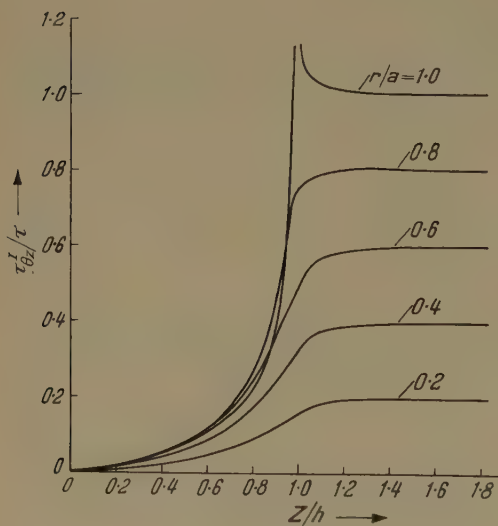


Figure 2

Distribution of  $\tau_{\theta z}^I$  in the shaft.

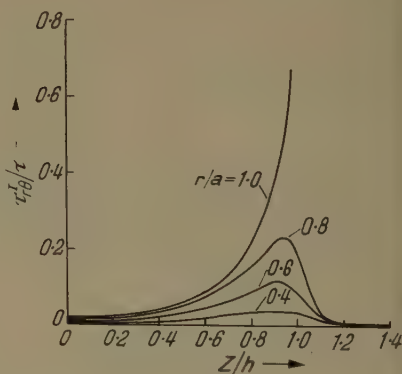


Figure 3

Distribution of  $\tau_{r\theta}^I$  in the shaft.

<sup>1)</sup> H. SAITO, Techn. Rep. Tohoku University 13, No. 2, 178 (1954).



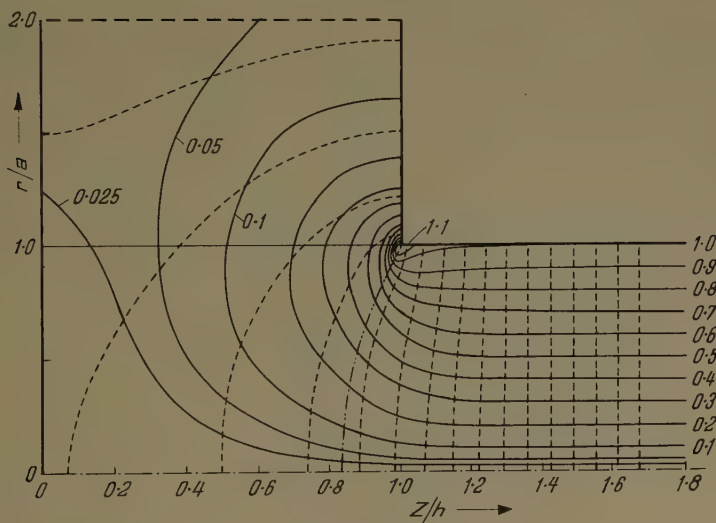


Figure 4

—: Curves of  $\sqrt{\tau_{r0}^2 + \tau_{\theta}^2}/\tau = \text{constant}$ ; ----: Curves of  $v/r = \text{constant}$ .

### Zusammenfassung

Es wird hier ein Lösungsverfahren besprochen für das Torsionsproblem der Welle, auf die eine Scheibe oder ein Rad gepresst ist.

(Received: April 13, 1955.)

### Varia – Miscellaneous – Divers

## Herbsttagung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft vom 24. bis 25. September 1955 in Pruntrut

Untersetzer mit Flächentransistoren<sup>1)</sup>, von E. BALDINGER und M. NICOLET, Basel<sup>2)</sup>.

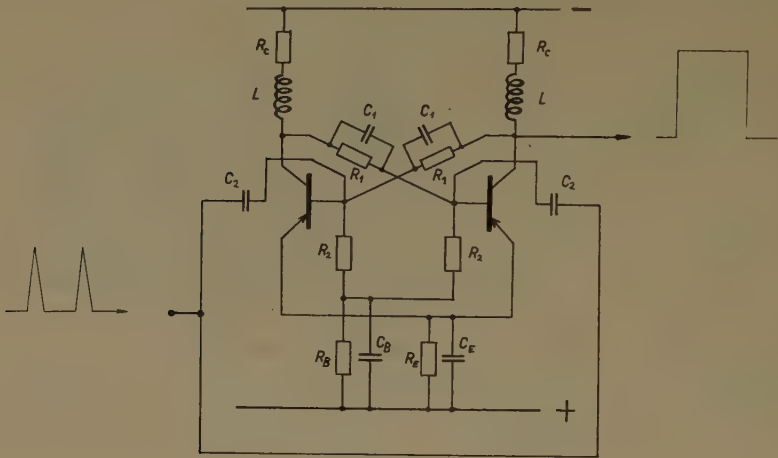
Untersetzer mit Flächentransistoren sind schon verschiedentlich beschrieben worden [1], [2], [3], [4], [5], [6], [9]<sup>3)</sup>, doch waren Angaben über das Verhalten ein und derselben Schaltung unter verschiedenen Betriebsbedingungen nicht erhältlich. Deshalb ist der hier beschriebene Untersetzer sowohl auf seine Temperaturabhängigkeit als auch auf sein Auflösungsvermögen bei regelmässig und bei statistisch eintreffenden Eingangsimpulsen untersucht worden.

<sup>1)</sup> Vorgetragen an der Herbsttagung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft, mit Ausnahme der Ergebnisse, die sich auf Philco-Transistoren beziehen.

<sup>2)</sup> Physikalisches Institut der Universität Basel.

<sup>3)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf Seite 506.

Das in Figur 1 dargestellte Schema des Untersetzers entspricht demjenigen eines üblichen Triodenscalers mit zwei stabilen Zuständen. Bei Schaltungen dieser Art ist es wesentlich, den Arbeitspunkt des leitenden Transistors so zu wählen, dass die Basis-Kollektorspannung einen gewissen Minimalwert nie unterschreitet, ansonst das Impulsverhalten des Transistors beeinträchtigt und somit



Figur 1

Schaltschema des Untersetzers mit Transistoren.

Transistorentyp	Philips OC 70 und 71	Philco SB-100
$R_1$	15 $k\Omega$	15 $k\Omega$
$R_2$	3 $k\Omega$	3 $k\Omega$
$R_B$	15 $k\Omega$	15 $k\Omega$
$R_E$	3 $k\Omega$	3 $k\Omega$
$R_C$	2 $k\Omega$	2 $k\Omega$
$C_1$	1000 pF	20 pF
$C_2$	400 pF	10 pF
$C_B$	2,5 $\mu F$	2,5 $\mu F$
$C_E$	2,5 $\mu F$	2,5 $\mu F$
$L$	2 mH	40 $\mu H$

das Auflösungsvermögen verschlechtert wird [7], [8]. Der Untersetzter spricht auf positive Eingangssignale an, welche den leitenden Transistor sperren. Das Ausgangssignal wird zuerst differenziert, worauf eine Diode die negativen Impulse unterdrückt. Ist ein geringeres Auflösungsvermögen zulässig, so können die einzelnen Stufen direkt mit kleinen Seriewiderständen gekoppelt werden<sup>1)</sup>.

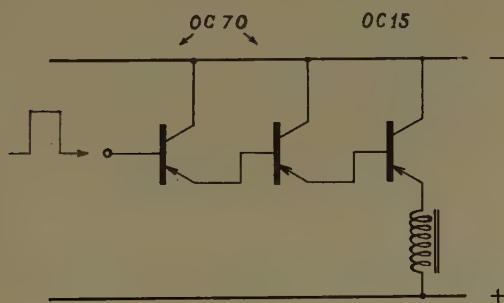
Aus allgemeinen Betrachtungen über den Ein- und Ausschaltvorgang bei Flächentransistoren [8] lässt sich folgern, dass das zeitliche Auflösungsvermögen von Kippschaltungen eine obere Schranke nicht überschreiten kann. Eine Schätzung zeigt, dass diese Schranke für Untersetzter unserer Art bei rund  $f_0/2$  liegt ( $f_0$  = Grenzfrequenz des Transistors). Das wirklich erreichbare Auflösungs-

<sup>1)</sup> Auch eine induktive Kopplung über die Kollektorinduktivitäten wäre möglich, ist aber nicht untersucht worden.

vermögen hängt von der Schaltung ab, wobei spezielle Massnahmen – zum Beispiel das Einführen von Induktivitäten im Kollektorkreis ( $L$ , Figur 1) – diese Grenze besser anzunähern erlauben.

Der Widerstand der Basis-Emitterstrecke und der Sperrstrom  $I_{c_0}$  des Kollektors sind stark temperaturabhängig. Ihre Werte sollten deshalb keinen nennenswerten Einfluss auf das Verhalten der Schaltung besitzen. Dies wird so erreicht, dass im Stromkreise des Emitters ein genügend gross dimensionierter Seriewiderstand  $R_E$  eingeschaltet wird und ferner der Strom durch den Spannungsteiler  $R_C - R_1 - R_2$  gross gegen  $I_{c_0}$  bemessen wird.

Figur 2 zeigt das Schema der Ausgangsstufe. Zur Registrierung dient ein Sodeco-Zählwerk von  $12\ \Omega$  Widerstand. Der dazu notwendige Strom von etwa



Figur 2

Endstufe mit Leistungstransistor und Zählwerk.

150 mA wird vom Leistungstransistor OC15 geliefert. Um die letzte Untersetzungsstufe durch den Steuerstrom nicht übermässig zu belasten, erfolgt die Kopplung über zwei Kollektorbasisstufen (Kathodefolgestufen).

Die Betriebsdaten des Untersetzers sind der folgenden Zusammenstellung zu entnehmen:

Transistoren	OC 70 und 71	SB-100
$f_0$ , rund . . . . .	400 kHz	30 MHz
Batteriespannung . . . . .	6,5 V	4,5 V
Batteriestrom . . . . .	2,6 mA	0,9 mA
Eingangsimpulse . . . . .	1,8 V	1,1 V
Ausgangsimpulse . . . . .	2,0 V	1,1 V
Auflösungsvermögen		
22°C . . . . .	120 kHz	5 MHz
30°C . . . . .	110 kHz	5 MHz
40°C . . . . .	95 kHz	5 MHz
45°C . . . . .	80 kHz	5 MHz

Zwischen statistischen und regelmässigen Eingangsimpulsen konnte kein Unterschied im Auflösungsvermögen festgestellt werden. Änderungen der Batteriespannung sind in grossen Grenzen zulässig.

Wir danken der Stiftung Hasler-Werke, durch deren finanzielle Unterstützung die vorliegende Arbeit zustande gekommen ist.

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] T. A. PRUGH, *Junction-Transistor Switching Circuits*, Electronics 28, 1, 168 (1955).
- [2] J. E. FLOOD, *Junction-Transistor Trigger Circuits*, Wireless Eng. 32, 5, 122 (1955).
- [3] M. RUBINOFF *et al.*, *Directly Coupled Transistor Circuits*, Electronics 28, 6, 132 (1955).
- [4] J. G. LINVILL, *Nonsaturating Pulse Circuits Using Two Junction Transistors*, Proc. I. R. E. 43, 7, 826 (1955).
- [5] P. KRENITSKY, *Decade Counter Employs Si-Transistors*, Electronics 28, 8, 112 (1955).
- [6] E. W. SARD, *Junction-Transistor Multivibrators and Flip-Flops*, I. R. E. Conv. Rec. 2 (II), 119 (1954).
- [7] J. J. EBERS und J. L. MOLL, *Large-Signal Behavior of Junction Transistors*, Proc. I. R. E. 42, 12, 1761 (1954).
- [8] J. L. MOLL, *Large-Signal Transient Response of Junction Transistors*, Proc. I. R. E. 42, 12, 1773 (1954).
- [9] R. H. BETER, W. E. BRADLEY, R. B. BROWN, and M. RUBINOFF, *Surface-Barrier Transistor Computer Circuits*, I. R. E. Conv. Rec. 3 (IV) (1955).

## Summary

A simple circuit for a scale of two using junction transistors is described. A resolution up to 5 Mc/s has been achieved.

---

 Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques
 

---

**Elektromagnetische Wellen.** Von KARL WILLY WAGNER (Birkhäuser Verlag, Basel 1953). 257 S., 185 Fig., 22 Tab.; Lw. sFr. 33.30, br. sFr. 29.10.

Nach langer, fruchtbarer und erfolgreicher wissenschaftlicher Tätigkeit, welche vor allem den theoretischen Grundlagen der elektrischen Nachrichtentechnik gewidmet war, schloss KARL WILLY WAGNER im Jahre 1953, nur kurze Zeit nach Vollendung seines 70. Altersjahres, die Augen für immer. Sein Buch *Elektromagnetische Wellen* ist eine Frucht der Arbeit seiner letzten Jahre. Es konnte noch vollkommen abgeschlossen und in mustergültiger Ausstattung in der Reihe der Lehr- und Handbücher der Ingenieurwissenschaften des Birkhäuser Verlages in Basel erscheinen. Sein Zweck besteht vor allem in einer Einführung in die Theorie der elektromagnetischen Wellen als Grundlage für ihre Anwendungen in der elektrischen Übertragungstechnik. Es ist daher Wert auf eine sehr klare, nicht zu knappe Darstellung gelegt, welche durch viele sorgfältig ausgewählte Figuren und Tabellen unterstützt wird und die mathematischen Kenntnisse nicht überschreitet, die ein Ingenieur an einer Technischen Hochschule zu erwerben pflegt. Den Bedürfnissen des Kabeltechnikers (Drahtwellen, Wellen in Leitungsbündeln) oder des Starkstromtechnikers (Wanderwellen) wird ebenso Rechnung getragen wie denjenigen des Radiotechnikers (Wellen in Hohlleitern, Dipole, elektrische Wellen in der Ionosphäre). Die eingestreuten Anwendungen und Beispiele, die oft bis zur zahlenmässigen Berechnung gehen, tragen zur Belebung des Stoffes und zur Erleichterung des Verständnisses erheblich bei. Man spürt beim



Studium des Buches, dass es nicht nur von einem begabten Theoretiker verfasst wurde, sondern auch von einem durch lange, enge Verbindung mit der Praxis erfahrenen Fachmann. Die besten Empfehlungen des Referenten begleiten das Werk.

F. Tank

**Neutron Optics.** Von D. J. HUGHES (Interscience Publishers, Inc., New York 1954). VII + 136 S., 34 Fig.; \$2.50.

Das Buch von D. J. HUGHES befasst sich sowohl mit den physikalischen Prinzipien als auch mit den Anwendungen der Neutronenoptik. Dabei wird in erster Linie auf das Verhalten und die Benutzung von thermischen Neutronen eingegangen, die in Uranreaktoren in extrem hohen Dichten erzeugt werden können. Das Buch ist wie folgt gegliedert: Das erste Kapitel umfasst die Grundlagen der Neutronenoptik, wobei auf Verwandtes und Gegensätzliches zur gewöhnlichen Optik hingewiesen wird. Eine kurze Übersicht der experimentellen Methoden ist im folgenden Kapitel enthalten. Die restlichen Kapitel sind den Anwendungen gewidmet: Wechselwirkungen der Neutronen mit Kernen, Bestimmung von Kristallstrukturen und Neutronenstreuung an magnetischen Materialien. Das letztgenannte Gebiet umfasst die prägnantesten Anwendungen der Neutronenoptik. In dieser Domäne haben Neutronen gegenüber elektromagnetischen Wellen den Vorzug, dass sie Wechselwirkungen mit den magnetischen Momenten der Atome zeigen.

Das Buch von HUGHES vermittelt einen klaren und übersichtlichen Einblick in ein in den letzten Jahren entstandenes Wissensgebiet. Durch Weglassen von experimentellen und theoretischen Einzelheiten wird ein vorzüglicher Überblick gegeben.

P. Huber

**Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker.** Von R. ZURMÜHL (Springer, Berlin 1953). XI + 481 S., 114 Abb.; DM 28.50.

Dieses als Ergänzung der mathematischen Grundvorlesung gedachte Buch ist eine Einführung in die numerischen Methoden der Mathematik, unter besonderer Berücksichtigung der (elektrischen) Rechenmaschinen. Hauptgegenstände sind: Auflösung von Gleichungen, insbesondere von algebraischen und von Systemen linearer, Matrizen-Eigenwertprobleme, Interpolation und Integration, Ausgleichsrechnung, Reihenentwicklung von Funktionen und schliesslich die Anfangs-, Rand- und Eigenwertprobleme gewöhnlicher Differentialgleichungen. In jedem Kapitel wird mit der mathematischen Theorie von den Grundlagen her begonnen, so dass das Buch schon in den ersten Semestern gelesen werden kann. Einige spezielle Fragen, wie zum Beispiel die Auflösung von Gleichungen dritten und vierten Grades, sind recht breit behandelt; dagegen wird mancher Leser, vor allem der Ingenieur in der Praxis, bedauern, dass wichtige Problemkreise, wie partielle Differentialgleichungen oder Integralgleichungen, nicht mehr zur Behandlung kommen.

Beispiele und Rechenschemata sind nach Art einer Vorlesung in den ausführlichen Text eingeflochten. Das Buch eignet sich daher weniger als Nachschlagewerk als zum Beispiel dasjenige von MILNE (*Numerical Calculus* [Princeton University Press, Princeton 1949], 393 Seiten), das leider nicht zitiert wird, wie denn überhaupt das angelsächsische Schrifttum etwas stiefmütterlich behandelt ist.

Im übrigen aber ist das Buch sehr sorgfältig geschrieben, enthält viele wertvolle Ratschläge für das numerische Rechnen und wird als Lehrbuch vor allem für den Anfänger gute Dienste leisten.

H. J. Maehly

**50-100 Binomial Tables.** Von HARRY G. ROMIG (Wiley & Sons, Inc., New York; Chapman & Hall, London 1953). XXVII + 172 S.; \$4.00.

Den Hauptteil des Buches bilden Tabellen für

$$b(m, n, p) = \binom{n}{m} (1-p)^{n-x} p^x \quad \text{und} \quad B(m, n, p) = \sum_{k=0}^m b(k, n, p)$$

für  $m = 0 (1) n$ ,  $n = 50 (5) 100$ ,  $p = 0,01 (0,01) 0,50$ . Es werden durchweg sechs Dezimalen nach dem Komma angegeben, wobei aber die letzte Stelle um einige Einheiten vom wahren Wert abweichen kann.

Eine 15seitige Einleitung gibt einen kurzen Abriss der Theorie (Zusammenhänge mit der hypergeometrischen Verteilung und der unvollständigen Betafunktion), eine Anleitung zum Gebrauch der Tafeln mit Ablesebeispielen, eine Formel zur Interpolation in  $m$  und  $p$  und ein kleines Literaturverzeichnis.

Das vorliegende Werk bildet die Fortsetzung einer analogen Tafel für  $n = 2 (1) 49$ : *Tables of the Binomial Probability Distribution*, Applied Mathematics Series 6 (U.S. Government Printing Office, Washington 1950). Beide Tafeln werden bei der Auswertung statistischer Qualitätskontrollen gute Dienste leisten.

H. J. Maehly

**Flow Properties of Disperse Systems.** Herausgegeben von J. J. Hermans (North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1953). XI + 445 S., 162 Fig.; fl. 35.– (70 s).

In der von J. M. BURGERS, J. J. HERMANS und G. W. SCOTT BLAIR veröffentlichten Bücherreihe "*Deformation and Flow – Monographs on the Rheological Behaviour of Natural and Synthetic Products*" nimmt der von J. J. HERMANS herausgegebene Band *Flow Properties of Disperse Systems* eine markante Stellung ein. Darin wird erstmals versucht, die gemeinsamen Merkmale im strömungstechnischen Verhalten disperser Systeme trotz ihrer mannigfaltigen Erscheinungsformen herauszuarbeiten und zu einer allgemeinen, zweckdienlichen Darstellung zu bringen. Der Erfolg ist in Anbetracht der Vielgestaltigkeit des behandelten Stoffes erstaunlich, wobei dieser die Strömungscharakteristiken aller Formen disperser Systeme umfasst, von den Suspensionen, Emulsionen und hochpolymeren Lösungen bis zu den Schäumen, Räuchen und Pulvern. Je nach Gegenstand ist die Behandlung des Stoffes verschiedenen Fachbearbeitern zugewiesen. Bemerkenswert ist, dass trotz der Betonung der gemeinsamen Merkmale im strömungstechnischen Verhalten, die kennzeichnenden Eigenschaften der dispersen Partikel und ihr individueller Einfluss auf die Strömungserscheinungen ebenfalls zur genügenden Darstellung gelangen.

Das Buch umfasst die folgenden Aufsätze: I. R. ROSCOE (Newcastle upon Tyne), *Suspensions*; E. G. RICHARDSON (Newcastle upon Tyne), *Emulsions*; J. J. HERMANS (Leiden), *Gels*; CH. SADRON (Strasbourg), *Dilute Solutions of Impenetrable Rigid Particles*; J. J. HERMANS (Leiden), *Dilute Solutions of Flexible Chain Molecules*; E. G. RICHARDSON (Newcastle upon Tyne), *Liquid Sprays*; H. L. GREEN (Porton Down, Wilts.), *Atomization of Liquids*; RAPHAEL MATALON (London), *Foams*; H. L. GREEN (Porton Down, Wilts.), *Smoke*; Mrs. B. S. NEUMANN (Redhill, Surrey), *Powders*.

Den Schluss des Buches bildet ein ausführliches Sach- und Autorenregister. Das Werk lässt berechtigterweise erwarten, dass es schon in naher Zukunft zur Ausrüstung aller Hochschul- und Industrielaboratorien der Physik, Chemie und Biologie gehören wird, in denen das strömungstechnische Verhalten disperser Systeme studiert wird.

R. Sängers



ELEKTRONENMIKROSKOPE  
MIKROTOME  
ELEKTRONENDIFFRAKTOGRAPHEN  
HOCHSPANNUNGSOSZILLOGRAPHEN



TRÜB, TÄUBER · ZÜRICH

### *Neuerscheinungen*

**Haack**

## **Elementare Differentialgeometrie**

Von Dr. WOLFGANG HAACK, Professor an der Technischen Hochschule Berlin. 242 Seiten mit 25 Abb. Preis gebunden Fr. 22.- (DM 22.-), brosch. Fr. 18.70 (DM 18.70). Sammlung «Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften» – Mathematische Reihe, Band 20.

Inhalt: Vektoren und Bewegungsinvarianten – Kurven im Raum – Einparametrische Dreibeinscharen. Streifen – Elemente der Flächentheorie – Abbildungen zweier Flächen aufeinander – Ableitungsgleichungen und Integrierbarkeitsbedingungen – Geometrie auf der Fläche – Minimalflächen – Zweidimensionale Dreibeinmannigfaltigkeiten – Existenzsätze der Flächentheorie.

**Weyl**

## **Symmetrie**

Von Dr. HERMANN WEYL, Professor an der Eidg. Technischen Hochschule in Zürich und am Institute for Advanced Study in Princeton. Aus dem Englischen übersetzt von Prof. Dr. LULU BECHTOLSHEIM, University of Redlands/Cal. (USA.). 157 Seiten mit 72 Figuren. Preis gebunden Fr. 17.70 (DM 17.70). Sammlung «Wissenschaft und Kultur» – Band 11.

Inhalt: 1. Bilaterale Symmetrie – 2. Translatorische, rotative und verwandte Symmetrien – 3. Ornamentale Symmetrie – 4. Die allgemeine mathematische Idee der Symmetrie – 5. Zwei Anhänge über endliche Rotationsgruppen in drei Dimensionen.

Wo immer der Mensch Ordnung, Schönheit und Vollkommenheit zu begreifen oder zu schaffen versucht hat, war Symmetrie ihm ein leitendes Prinzip. Dieses mit zahlreichen Abbildungen geschmückte «Handbüchlein der Symmetrie», das in deutscher Übersetzung vier an der Universität Princeton 1951 gehaltene Vorlesungen (Vanuxem Lectures) wiedergibt, sucht auf kleinem Raum allen wesentlichen Seiten dieses faszinierenden Gegenstandes gerecht zu werden.

BIRKHÄUSER VERLAG · BASEL/STUTTGART

## Neuerscheinungen

Schläfli

### Gesammelte mathematische Abhandlungen

In drei Bänden. Herausgegeben im Auftrag der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft vom Komitee Steiner-Schläfli der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft, ergänzt und erläutert durch Nachworte der Herausgeber.

Band III: 402 Seiten. Preis gebunden Fr. 59.30 (DM 59.30).

«Die Schweizer Kollegen sind zu beglückwünschen, dass es ihnen gelungen ist, ihrem grossen Landsmann mit dieser Gesamtausgabe seiner mathematischen Schriften ein würdiges Denkmal zu schaffen. Die Ausstattung und der Druck des Buches sind hervorragend» (H. Görtler, Archiv der Mathematik).

"The elegant volume under review, profusely annotated by Burckhardt, Hadwiger, and Kollros, is a fitting tribute to the genius of this great Swiss mathematician" (H. S. M. Coxeter, Mathematical Reviews).

Mit diesem Band ist das dreibändige Werk, das erstmals sämtliche Schriften von Bedeutung des grossen Mathematikers enthält, abgeschlossen.

Speiser

### Die geistige Arbeit

Von Dr. ANDREAS SPEISER, Professor an der Universität Basel. 216 Seiten. Preis gebunden Fr. 19.25 (DM 19.25). Sammlung «Wissenschaft und Kultur» – Band 9.

Inhalt: Die geistige Arbeit – Die räumliche Deutung der Aussenwelt – Die platonische Lehre vom Unbekannten Gott und die christliche Trinität – Platos Ideenlehre und die Mathematik – Wissenschaft und Glaube – Der Erlösungsbegriff bei Plotin – Die mathematische Betrachtung der Kunst – Die Gottesbeweise von Plato, Anselmus und Leibniz – Die philosophisch-naturwissenschaftliche Fakultät – Geist und Mathematik – Die Grundlagen der Mathematik von Plato bis Fichte – Über die Freiheit – Die mathematische Denkweise in den Geisteswissenschaften und in der Kunst.

### Selecta Hermann Weyl

Herausgegeben zum siebzigsten Geburtstag von Prof. Dr. HERMANN WEYL von der Eidg. Technischen Hochschule in Zürich und vom Institute for Advanced Study in Princeton. Etwa 600 Seiten. Preis gebunden Fr. 48.90 (DM 48.90).

Diese Sammlung enthält 19 Abhandlungen von Hermann Weyl aus den Jahren 1910 bis 1952; sie gibt einen Querschnitt durch das mathematische Schaffen des grossen Gelehrten.

BIRKHÄUSER VERLAG · BASEL/STUTTGART